Devoir à rendre le 14/03/2025

Soit (E) l'équation différentielle : $(1-x)^2 y' = (2-x) y$.
On note I l'intervalle $]-\infty, 1[$.

1. *Calculer une primitive A de la fonction a définie sur I par : $a(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$.*

   Pour tout $x \in I$, on a $a(x) = \dfrac{1+1-x}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{1-x}$. Une primitive de a est donc : $\boxed{A : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - \ln(1-x)}$

2. *Intégrer (E) sur I.*

   Une fonction f est solution de (E) sur I si, et seulement si, :

   $$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2} f(x)$$

   Comme (E) est une équation différentielle homogène linéaire d'ordre 1, l'ensemble des solutions de (E) est : $\mathcal{S} = \{I \to \mathbb{R},\ x \mapsto Ce^{A(x)},\ C \in \mathbb{R}\}$ soit

   $$\boxed{\mathcal{S} = \{I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{C}{1-x} e^{1/(1-x)},\ C \in \mathbb{R}\}}$$

   Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \dfrac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$.

3. *Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :*

   $$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}, \quad \forall x \in I$$

   La démonstration permet d'exprimer $P_{n+1}(X)$ en fonction de $P_n(X)$, $P_n'(X)$ et X. Expliciter cette relation.

   Pour tout entier n, on pose :

   $H(n)$: "Il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$ "

   Initialisation : En posant $P_0 = X$, on vérifie $H(0)$.

   Hérédité : Supposons $H(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Il existe alors un polynôme P_n tel que : $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$.

   Par suite, f est $n+1$ fois dérivable et pour tout $x \in I$, on a

   $$f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{(1-x)^2} P_n'\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}} + P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) \frac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{1}{1-x}}$$

   On pose $P_{n+1} = X^2 P_n' + X^2 P_n$, on obtient un polynôme tel que :

   $$\forall x \in I, \quad f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}.$$

   Ainsi, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :

   $$\boxed{\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}}$$

   et les polynômes P_n et P_{n+1} sont reliés pas : $P_{n+1} = X^2 P_n' + X^2 P_n$

4. *Préciser P_0, P_1, P_2 et P_3.*

   On obtient $\boxed{P_0 = X}$, $\boxed{P_1 = X^3 + X^2}$, $\boxed{P_2 = X^5 + 4X^4 + 2X^3}$ et $\boxed{P_3 = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4}$.

5. *En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E), prouver que pour tout entier positif n :*

   $$P_{n+1}(X) = \left[(2n+1) X + X^2\right] P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)$$

   Soit $g : x \mapsto (1-x)^2$ et $h : x \mapsto 2-x$.
   Comme f est solution de (E), on a $g f' = h f$.
   Ainsi, pour tout entier n, on a :

   $$(g f')^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} f^{(n+1-k)} = (h f)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)} f^{(n-k)}.$$

   Comme $g^{(k)}$ est nulle pour $k \leq 3$ et que $h^{(k)}$ est nulle pour $k \leq 2$, on en déduit que

   $$g f^{(n+1)} + n g' f^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2} g'' f^{(n-1)} = h f^{(n)} + n h' f^{(n-1)}$$

   i.e. que, pour tout $x \in I$, on a

   $$\begin{aligned}(2-x) P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}} - n P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}} \\ = (1-x)^2 P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}} - 2n(1-x) P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}} \\ + n(n-1) P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in I$, on a, en posant $u = \dfrac{1}{1-x}$,

$$(1+1/u)P_n(u) - nP_{n-1}(u) = \frac{1}{u^2}P_{n+1} - 2n\frac{1}{u}P_n(u) + n(n-1)P_{n-1}(u)$$

i.e. $(u^2+u)P_n(u) - nu^2P_{n-1}(u) = P_{n+1} - 2nuP_n(u) + n(n-1)u^2P_{n-1}(u)$.
Le polynôme $(X^2+X)P_n - nX^2P_{n-1} - P_{n+1} + 2nXP_n - n(n-1)X^2P_{n-1}$ admet donc une infinité de racines (l'ensemble des $\dfrac{1}{1-x}$, $x \in I$ i.e. $\mathbb{R}^{+*}$). Par suite, on a

$$\boxed{P_{n+1} = \left[(2n+1)X + X^2\right]P_n - n^2X^2P_{n-1}}$$

Le but de cette partie est d'établir quelques propriétés des nombres $a_n = f^{(n)}(0)$.

6. *Pour tout entier positif n, exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1}.*
   Pour tout entier n, on a $a_n = P_n(1)e$. Donc le relation précédente donne :

$$\boxed{a_{n+1} = 2(n+1)a_n - n^2a_{n-1}}$$

7. *Préciser : a_0, a_1, a_2 et a_3.*
   Pour tout entier n, on a $a_n = P_n(1)e$. Donc

$$\boxed{a_0 = e,\ a_1 = 2e,\ a_2 = 7e,\ a_3 = 34e.}$$

8. *On désigne par (u_p) la suite définie pour tout entier naturel p par : $u_p = \displaystyle\sum_{i=0}^{p}\frac{1}{i!}$.*
   En appliquant une formule de Taylor à la fonction exponentielle, prouver que la suite (u_p) converge vers e.
   La fonction exp étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$|u_p - e| = \left|\exp(0) - \sum_{k=0}^{p}\frac{(1-0)^k\exp^{(k)}(0)}{k!}\right| \leq \frac{(1-0)^{p+1}}{(p+1)!}\max_{[0,1]}\left|\exp^{(p+1)}\right| = \frac{e}{(p+1)!}$$

Comme $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\frac{e}{(p+1)!} = 0$, on en déduit par encadrement que $\boxed{\displaystyle\lim_{p\to+\infty}u_p = e}$

Soit p et n des entiers naturels quelconques, on pose $S_p(n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p}\frac{(n+i)!}{(i!)^2}$

9. (a) *Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ à l'aide de u_p et u_{p-1} pour $p \geqslant 1$.*

   On a $\boxed{S_p(0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p}\frac{1}{i!} = u_p}$ et

$$S_p(1) = \sum_{i=0}^{p}\frac{(1+i)!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p}\frac{1+i}{i!} = u_p + \sum_{i=1}^{p}\frac{1}{(i-1)!} \text{ i.e.}$$

$$\boxed{S_p(1) = u_p + u_{p-1}}$$

   (b) *Prouver que les suites $p \to S_p(0)$ et $p \to S_p(1)$ convergent et préciser leur limite en fonction de e.*
   Les suites $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers e et $2e$.

10. *Prouver que quels que soient les entiers p et n supérieurs ou égaux à 1 :*

$$S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

Soient n et p deux entiers strictement positifs. On a :

$$\begin{aligned}
&S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2S_p(n-1)\\
&\quad= \sum_{i=0}^{p}\frac{(n+1+i)!}{(i!)^2} - (2n+2)\sum_{i=0}^{p}\frac{(n+i)!}{(i!)^2} + n^2\sum_{i=0}^{p}\frac{(n-1+i)!}{(i!)^2}\\
&\quad= \sum_{i=0}^{p}\frac{(n-1+i)!}{(i!)^2}(-n+i(i-1)) = \sum_{i=0}^{p}\frac{(n-1+i)!}{(i!)^2}\left(-(n+i)+i^2\right)\\
&\quad= -S_p(n) + \sum_{i=1}^{p}\frac{(n-1+i)!}{((i-1)!)^2} = -S_p(n) + \sum_{i=0}^{p-1}\frac{(n+i)!}{(i!)^2}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)}$

11. *En déduire que pour tout entier naturel n, la suite $p \to S_p(n)$ converge.*
   Pour tout entier n, on pose : $H(n)$: "La suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ converge "
   Initialisation : Les suites $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que les suites $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(n-1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent.
   Pour tout entier p non nul, on a :

$$S_p(n+1) = (2n+2)S_p(n) - n^2S_p(n-1) + S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

   Par conséquent, la suite $(S_p(n+1))_{p\in\mathbb{N}}$ converge.
   On a donc prouvé par une récurrence double que pour tout entier n, la suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ converge.

12. *Prouver que : $a_n = \displaystyle\lim_{p\to+\infty}\sum_{i=0}^{p}\frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \lim_{p\to+\infty}n!\sum_{i=0}^{p}\binom{n+i}{n}.\frac{1}{i!}$*

Pour tout entier n, on pose ℓ_n la limite de la suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$.

Pour tout entier n, on pose : $H(n)$: "La suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers a_n. "
Initialisation : Les suites $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers a_0 et a_1.
Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que les suites $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(n-1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers a_n et a_{n-1}.
Pour tout entier p non nul, on a :

$$S_p\left(n+1\right)=\left(2n+2\right)S_p\left(n\right)-n^2S_p\left(n-1\right)+S_{p-1}\left(n\right)-S_p\left(n\right)$$

Par conséquent, la suite $(S_p(n+1))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers

$$\left(2n+2\right)a_n-n^2a_{n-1}+a_n-a_n=\left(2n+2\right)a_n-n^2a_{n-1}=a_{n+1}$$

d'après la question 6. Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\lim\limits_{p\to+\infty}\sum\limits_{i=0}^{p}\dfrac{(n+i)!}{(i!)^2}$ Pour tout $(n,i)\in\mathbb{N}^2$, on a $\dbinom{n+i}{n}.\dfrac{1}{i!}=\dfrac{(n+i)!}{n!\,(i!)^2}$ donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\lim_{p\to+\infty}n!\sum_{i=0}^{p}\binom{n+i}{n}.\frac{1}{i!}$$