Devoir à rendre le 14/03/2025

Soit (E) l'équation différentielle : $(1-x)^2 y' = (2-x)\,y$. On note $I = \left]-\infty, 1\right[$.

1. Calculer une primitive A de la fonction a définie sur I par : $a(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$.
2. Intégrer (E) sur I. On notera f la fonction définie sur I par $f(x) = \dfrac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$.
3. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$.

   La démonstration permet d'exprimer $P_{n+1}(X)$ en fonction de $P_n(X)$, $P_n'(X)$ et X. Expliciter cette relation.
4. Préciser P_0, P_1, P_2 et P_3.
5. En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E), prouver que pour tout entier positif n : $P_{n+1}(X) = \left[(2n+1)X + X^2\right] P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)$.

   Le but de cette partie est d'établir quelques propriétés des nombres $a_n = f^{(n)}(0)$.
6. Pour tout entier positif n, exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1}.
7. Préciser : a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4.
8. On désigne par (u_p) la suite définie pour tout entier naturel p par : $u_p = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!}$.

   En appliquant une formule de Taylor à la fonction exponentielle, prouver que la suite (u_p) converge vers e.

   Soit p et n des entiers naturels quelconques, on pose :$S_p(n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$.
9. (a) Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ à l'aide de u_p et u_{p-1} pour $p \geqslant 1$.

   (b) Prouver que les suites $p \mapsto S_p(0)$ et $p \mapsto S_p(1)$ convergent et préciser leur limite en fonction de e.
10. Prouver que quels que soient les entiers p et n supérieurs ou égaux à 1 :
$$S_p(n+1) - (2n+2)\,S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$
11. En déduire que pour tout entier naturel n, la suite $p \mapsto S_p(n)$ converge.
12. Prouver que : $a_n = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \lim_{p\to+\infty} n! \sum_{i=0}^{p} \binom{n+i}{n} \cdot \frac{1}{i!}$