Devoir à rendre le 04/04/2025

Problème :
Pour tout entier n, on définit le polynôme $Q_n \in \mathbb{C}[X]$ par

$$Q_n = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right]$$

1. *Déterminer le degré de Q_n.*
   Les polynômes $(X+i)^{n+1}$ et $(X-i)^{n+1}$ sont de degré $n+1$ et unitaires donc le polynôme Q_n est de degré inférieur ou égal à n.
   D'après la formule du binôme de Newton, le coefficient devant X^n dans le polynôme $(X+i)^{n+1}$ étant égal à $(n+1)i$ et celui polynôme $(X+i)^{n+1}$ étant égal à $-(n+1)i$. Ainsi, le polynôme Q_n est de degré n et de coefficient dominant $n+1$.
2. *Pour tout entier naturel r, montrer que*

$$(1) : \qquad Q_{2r} = \sum_{p=0}^{r} (-1)^p \binom{2r+1}{2p+1} X^{2r-2p}$$

   D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned} 2iQ_{2r} &= \sum_{k=0}^{2r+1} \binom{2r+1}{k} i^k X^{2r+1-k} - \sum_{k=0}^{2r+1} \binom{2r+1}{k} (-i)^k X^{2r+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2r+1} \binom{2r+1}{k} \left(1-(-1)^k\right) i^k X^{2r+1-k} \end{aligned}$$

   Or, pour tout entier k pair, on a $1-(-1)^k = 0$ et, pour tout entier k impair, on a $1-(-1)^k = 2$ donc

$$2iQ_{2r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{2r+1}{2k+1} 2i^{2k+1} X^{2r+1-(2k+1)}$$

   donc

$$\boxed{Q_{2r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{2r+1}{2k+1} (-1)^k X^{2r-2k}}$$

3. (a) *Déterminer les racines de Q_n. Montrer que ces racines sont réelles.*
   Soit $x \in \mathbb{C}$. On a

$$Q_n(x) = 0 \Leftrightarrow (x+i)^{n+1} = (x-i)^{n+1}$$

   Comme i n'est pas racine de Q_n, on en déduit que :

$$\begin{aligned} Q_n(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{n+1} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,n]\!] \,:\, \frac{x+i}{x-i} = e^{2ik\pi/(n+1)} \\ \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,n]\!] \,:\, x\left(1 - e^{2ik\pi/(n+1)}\right) = i\left(e^{2ik\pi/(n+1)} + 1\right) \end{aligned}$$

   Pour $k=0$, l'équation $x\left(1 - e^{2ik\pi/(n+1)}\right) = i\left(e^{2ik\pi/(n+1)} + 1\right)$ n'a pas de solution et pour $k \in [\![1,n]\!]$, $1 - e^{2ik\pi/(n+1)} \neq 0$ donc :

$$Q_n(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![1,n]\!] \,:\, x = -i\frac{e^{2ik\pi/(n+1)}+1}{1-e^{2ik\pi/(n+1)}} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

   La fonction cotan : $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\pi[$ comme quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\pi[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
   Pour tout $x \in]0,\pi[$, on a $\operatorname{cotan}'(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} > 0$ donc la fonction cotan est strictement croissante sur $]0,\pi[$. Ainsi, les réels $\left(\operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$ sont n racines distinctes du polynôme Q_n.
   Comme ce polynôme est de degré n, on en déduit qu'il n'admet pas d'autres racines. En particulier, $\boxed{Q_n \text{ est scindé simple dans } \mathbb{R}.}$

   (b) *En déduire la décomposition de Q_n en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.*
   Comme Q_n est de coefficient dominant $n+1$, on a :

$$\boxed{Q_n = (n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)}$$

4. *Pour tout entier naturel r, montrer que*

$$(2) : \qquad Q_{2r} = (2r+1)\prod_{k=1}^{r}\left(X^2 - \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)\right)$$

On a

$$Q_{2r} = (2r+1)\prod_{k=1}^{2r}\left(X - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)\right)$$
$$= (2r+1)\prod_{k=1}^{r}\left(X - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)\right)\prod_{k=r+1}^{2r}\left(X - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)\right)$$
$$= (2r+1)\prod_{k=1}^{r}\left(X - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)\right)\prod_{k=1}^{r}\left(X - \text{cotan}\left(\frac{(2r+1-k)\pi}{2r+1}\right)\right)$$

Or, pour tout $x \in]0,\pi[$, on a $\text{cotan}(\pi - x) = -\text{cotan}(x)$ donc :

$$Q_{2r} = (2r+1)\prod_{k=1}^{r}\left(X - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)\right)\prod_{k=1}^{r}\left(X + \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)\right)$$
$$= (2r+1)\prod_{k=1}^{r}\left(X - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)\right)\left(X + \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)\right)$$

soit

$$\boxed{Q_{2r} = (2r+1)\prod_{k=1}^{r}\left(X^2 - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)\right)}$$

5. *En utilisant* (1) *et* (2), *établir l'égalité :*

$$\sum_{k=1}^{r}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right) = \frac{r(2r-1)}{3}$$

D'après les égalités (1) et (2), les polynômes $R = (2r+1)\prod_{k=1}^{r}\left(X - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)\right)$ et $S = \sum_{k=0}^{r}\binom{2r+1}{2k+1}(-1)^k X^{r-k}$ vérifie $R(X^2) = S(X^2)$. Le polynôme $R - S$ s'annule donc sur $\mathbb{R}^+$, ensemble infini, donc $R = S$. Ainsi :

$$(2r+1)\prod_{k=1}^{r}\left(X - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)\right) = \sum_{k=0}^{r}\binom{2r+1}{2k+1}(-1)^k X^{r-k}$$

En particulier, l'égalité des coefficients devant X^{r-1} donne :

$$-(2r+1)\sum_{k=1}^{r}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right) = \binom{2r+1}{3}(-1)^1 = -\frac{(2r+1)2r(2r-1)}{6}$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{r}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right) = \frac{r(2r-1)}{3}}$$

6. *En déduire que*

$$\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)} = \frac{2r(r+1)}{3}$$

Pour tout $x \in]0,\pi[$, on a $\text{cotan}^2(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$ donc :

$$\sum_{k=1}^{r}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right) = \sum_{k=1}^{r}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)} - 1\right) = \sum_{k=1}^{r}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)} - r$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)} = \frac{2r(r+1)}{3}}$$

7. (a) *Pour tout* $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, *établir les inégalités :*

$$\text{cotan}^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Soit $f : x \mapsto \sin x - x$. La fonction f est dérivable sur $[0,\pi/2]$ de dérivée $x \mapsto \cos x - 1$ strictement négative sur $]0,\pi/2]$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que : $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \sin x < x$ donc $0 < \sin^2 x < x^2$ puis

$$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Soit $g : x \mapsto \tan x - x$. La fonction g est dérivable sur $[0,\pi/2[$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$ strictement positive sur $]0,\pi/2[$. Comme $g(0) = 0$, on en déduit que : $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $0 < x < \tan x$ donc $0 < x^2 < \tan^2 x$ puis

$$\frac{1}{\tan^2} < \frac{1}{x^2}.$$

Ainsi, on a :

$$\boxed{\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\quad \text{cotan}^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}.}$$

(b) *En déduire un encadrement de*

$$\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)^2}$$

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2r+1} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc, d'après la question précédente, on a :

$$\sum_{k=1}^{r} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right) \leq \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\left(\dfrac{k\pi}{2r+1}\right)^2} \leq \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2r+1}\right)}$$

Donc

$$\boxed{\frac{r(2r-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\left(\dfrac{k\pi}{2r+1}\right)^2} \leq \frac{2r(r+1)}{3}}$$

(c) *En déduire que la suite* $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge et calculer sa limite.*

D'après la question précédente, on a

$$\frac{r(2r-1)\pi^2}{3(2r+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2} \leq \frac{2r(r+1)\pi^2}{3(2r+1)^2}$$

Or, $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \frac{r(2r-1)\pi^2}{3(2r+1)^2} = \lim_{r\to+\infty} \frac{2r(r+1)\pi^2}{3(2r+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Le théorème d'encadrement implique donc que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que

$$\boxed{\lim_{r\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Exercice 1 : Critère de Cauchy

Soit u une suite réelle strictement positive à partir d'un certain rang telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell.$$

1. Supposons que $\ell < 1$.

   Comme $\dfrac{1+\ell}{2} > \ell$, il existe un entier n_0 tel que :

   $$\forall n \geq n_0, \quad \sqrt[n]{u_n} \leq \frac{1+\ell}{2}$$

   donc :

   $$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n \leq \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$$

   Comme $\dfrac{1+\ell}{2} \in [0, 1[$, la série géométrique $\sum \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n$ converge.

   Le théorèmes de comparaison des séries à termes positifs implique la convergence de la série $\sum u_n$.

2. Supposons que $\ell > 1$.

   Comme $\dfrac{1+\ell}{2} < \ell$, il existe un entier n_0 tel que :

   $$\forall n \geq n_0, \quad \sqrt[n]{u_n} \geq \frac{1+\ell}{2}$$

   donc :

   $$\forall n \geq n_0, \quad u_n \geq \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$$

   Comme $\dfrac{1+\ell}{2} > 1$, la série géométrique $\sum \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n$ diverge.

   Le théorèmes de comparaison des séries à termes positifs implique la divergence de la série $\sum u_n$.

3. Considérons un réel α et la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

   On a alors $\sqrt[n]{u_n} = e^{\frac{1}{n}\alpha \ln n}$ qui tend vers 1 par croissances comparées.

   Ainsi,

   — pour $\alpha = 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ et $\sum u_n$ diverge ;

   — pour $\alpha = 2$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ et $\sum u_n$ converge.

   On suppose que $\ell = 1$. Montrer que l'on ne peut rien en conclure en donnant tel exemple où la série $\sum u_n$ converge et un exemple où la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 2

Grâce au théorème de Taylor-Young (la fonction arccos étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$), on obtient :

$$\arccos x \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{2} - x + o(x^2)$$

donc,

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Or,

— $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est une série alternée convergente (car ...) ;

— $\sum \left(u_n - \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ est une série convergente grâce au critère de Riemann.

Ainsi, la série étudiée est convergente comme somme de deux séries convergentes.

Exercice 3

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Pour tout entier $n \geq 2$, la relation de Chasles donne

$$\ln(n+1) - \ln 2 = \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln n$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\frac{\ln(n+1) - \ln 2 + 1}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$$

Donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1$ i.e. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

De plus, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right).$$

La série de terme général $\frac{1}{k} - \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est une série à termes négatifs dont les sommes partielles sont minorées par $-\ln 2$. Cette série est donc convergente. Par conséquent, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Si on note γ sa limite alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Plus efficace, on utilise le lien suite-série : la suite $u = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si, et seulement si, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.

On conclut, en montrant à l'aide d'un DL, que $u_{n+1} - u_n = O(1/n^2)$.