# Devoir à rendre le 04/04/2025

**Problème :**
Pour tout entier $n$, on définit le polynôme $Q_n \in \mathbb{C}[X]$ par

$$Q_n = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right]$$

1. Déterminer le degré de $Q_n$.
2. Pour tout entier naturel $r$, montrer que

$$(1) : \qquad Q_{2r} = \sum_{p=0}^{r} (-1)^p \binom{2r+1}{2p+1} X^{2r-2p}$$

3. (a) Déterminer les racines de $Q_n$. Montrer que ces racines sont réelles.
   (b) En déduire la décomposition de $Q_n$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Pour tout entier naturel $r$, montrer que

$$(2) : \qquad Q_{2r} = (2r+1)\prod_{k=1}^{r}\left(X^2 - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)\right)$$

5. En utilisant (1) et (2), établir l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{r} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right) = \frac{r(2r-1)}{3}$$

6. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)} = \frac{2r(r+1)}{3}$$

7. (a) Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, établir les inégalités :

$$\text{cotan}^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}.$$

   (b) En déduire un encadrement de

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)^2}$$

   (c) En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

**Exercice 1 :** Critère de Cauchy
Soit $u$ une suite réelle strictement positive à partir d'un certain rang telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell.$$

1. On suppose que $\ell < 1$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge
2. On suppose que $\ell > 1$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge
3. On suppose que $\ell = 1$. Montrer que l'on ne peut rien en conclure en donnant tel exemple où la série $\sum u_n$ converge et un exemple où la série $\sum u_n$ diverge.

**Exercice 2**
Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = (-1)^n\left(\arccos\frac{1}{n} - \arccos\frac{1}{n^2}\right)$$

**Exercice 3**
Prouver qu'il existe une constante $\gamma$ appelée constante d'Euler telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$