Devoir à rendre le 16/05/2025

Autour de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

I Calcul de l'intégrale $I = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$:

I Calcul de l'intégrale $I = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$:

On considère pour cela la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\mathrm{d}t$

1. *Calculez $f(0)$.*

   On a $\boxed{f(0) = \frac{\pi}{4}}$

2. *Soit $x \geq 0$. Montrer que $\frac{\pi}{4}e^{-2x} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}e^{-x}$.*

   Pour tout $t \in [0,1]$, $x \leq (1+t^2)x \leq 2x$ puis $\frac{e^{-2x}}{1+t^2} \leq \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} \leq \frac{e^{-x}}{1+t^2}$ donc $e^{-2x}f(0) \leq f(x) \leq e^{-x}f(0)$ i.e.

   $$\boxed{\frac{\pi}{4}e^{-2x} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}e^{-x}}$$

3. *En déduire la limite de f en $+\infty$.*

   Comme $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, le théorème d'encadrement implique que

   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

4. *Prouver que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.*

   Soit $x < 0$. Pour tout $t \in [0,1]$, $(1+t^2)x \leq x$ puis $\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} \geq \frac{e^{-x}}{1+t^2}$ donc $f(x) \geq e^{-x}f(0)$. Comme $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, le théorème d'encadrement donne :

   $$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$$

5. *Soit $u \in \mathbb{R}$. Montrer que $0 \leq e^u - 1 - u \leq \frac{1}{2}e^u u^2$.*

   Soit $\phi : u \mapsto e^u - 1 - u$. La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\phi' : u \mapsto e^u - 1$. Donc ϕ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $\phi(0) = 0$, on en déduit que ϕ est positive sur $\mathbb{R}^+$.

   Soit $\psi : u \mapsto e^u - 1 - u - \frac{1}{2}u^2e^u$. La fonction ψ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée seconde $\phi" : u \mapsto e^u(-u^2/2 - 2u)$. Donc ψ' est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $\psi'(0) = 0$, on en déduit que ψ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $\psi(0) = 0$, on en déduit que ψ est négative sur $\mathbb{R}$. Par conséquent

   $$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq e^u - 1 - u \leq \frac{1}{2}e^u u^2.}$$

   Soit $g : u \mapsto e^u - 1 - u - \frac{1}{2}u^2e^{-u}$. La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée seconde $g" : u \mapsto e^{-u}(e^{2u} - 2 + 3u - u^2/2)$. Donc $g"$ est négative sur $\mathbb{R}^-$ ($e^{2u} - 2 \leq -1$ et $3u - u^2/2 \leq 0$) donc g' est décroissante sur $\mathbb{R}^-$. Comme $g'(0) = 0$, on en déduit que g est croissante sur $\mathbb{R}^-$. Comme $g(0) = 0$, on en déduit que g est négative sur $\mathbb{R}^-$. Par conséquent

   $$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}^-, \quad 0 \leq e^u - 1 - u \leq \frac{1}{2}e^{-u}u^2.}$$

   Remarque : cette inégalité est beaucoup plus facile à obtenir avec la formule de Taylor Lagrange.

6. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in [-1,1]$. En déduire que*

   $$\left| f(x+h) - f(x) + h\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t \right| \leq \frac{2h^2}{3}e^{2|1-x|}$$

   On a

   $$f(x+h) - f(x) + h\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left[\frac{e^{-(1+t^2)(x+h)}}{1+t^2} - \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} + he^{-(1+t^2)x} \right]\mathrm{d}t$$

   Or, pour tout $t \in [0,1]$,

   $$\begin{aligned}\left| \frac{e^{-(1+t^2)(x+h)}}{1+t^2} - \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} - he^{-(1+t^2)x} \right| &= \left| \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} \right| \left| e^{-(1+t^2)h} - 1 + (1+t^2)h \right| \\ &\leq \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\frac{1}{2}e^{(1+t^2)h}\left((1+t^2)h\right)^2\end{aligned}$$

   Comme $(1+t^2)(h-x) \leq (1+t^2)(1-x) \leq (1+t^2)|1-x| \leq 2|1-x|$, on en déduit que

   $$\left| \frac{e^{-(1+t^2)(x+h)}}{1+t^2} - \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} + he^{-(1+t^2)x} \right| \leq \frac{h^2}{2}(1+t^2)e^{2|1-x|}$$

D'où :

$$\left|f(x+h)-f(x)+h\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{h^2}{2}e^{2|1-x|}\int_0^1 (1+t^2)\mathrm{d}t$$

soit

$$\boxed{\left|f(x+h)-f(x)+h\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{2h^2}{3}e^{2|1-x|}}$$

7. *En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de f' sous forme d'intégrale.*
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{2h}{3}e^{2|1-x|}$$

donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t = 0$$

i.e.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t.$$

Par conséquent, f est dérivable en x et

$$\boxed{f'(x) = -\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t}$$

8. *Prouver que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x^2)+\left(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.*
Les fonctions f et $x \mapsto x^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto f(x^2)$ aussi.
La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème fondamental de l'analyse.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = 2xf'(x^2)+2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = -2x\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}\mathrm{d}t+2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}\mathrm{d}t = e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}\mathrm{d}t.$$

Si $x=0$ alors $g'(0)=0$. Si $x \neq 0$ alors on effectue le changement de variable $u=tx$ ce qui est possible car $u \mapsto \frac{u}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on obtient :

$$\int_0^1 e^{-(tx)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u.$$

Par suite :

$$g'(x) = -2xe^{-x^2}\frac{1}{x}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u+2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = 0$$

La fonction g est donc de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ ce qui prouve que g est constante à sa valeur en 0 : $\frac{\pi}{4}$.

9. *En déduire l'existence et la valeur de I.*
Comme g et f admettent des limites en $+\infty$ égales respectivement à $\frac{\pi}{4}$ et 0, la fonction $x \mapsto \left(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ aussi et

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Pour tout $x \geq 0$, on a $\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t \geq 0$ donc

$$\boxed{I = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot}$$

10. En déduire la valeur de $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ et $\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^0 e^{-t^2}\mathrm{d}t$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $u \mapsto \sqrt{2}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc

$$\int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \int_0^{x/\sqrt{2}} e^{-u^2}\sqrt{2}\mathrm{d}u$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{2}I$$

Comme la fonction $t \mapsto e^{-t^2/2}$ est paire, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^0 e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

II Étude de la fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{x}e^{-t^2/2}\mathrm{dt}$:

1. *Montrer que la fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{x}e^{-t^2/2}\mathrm{dt}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.*
   Soit $(x,A)\in\mathbb{R}$, la relation de Chasles donne
$$\int_{-A}^{x}e^{-t^2/2}\mathrm{dt}=\int_{-A}^{0}e^{-t^2/2}\mathrm{dt}+\int_{0}^{x}e^{-t^2/2}\mathrm{dt}$$
   Ainsi, $F(x)$ est bien définie et $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{dt}\right)$ i.e.
$$\boxed{F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{dt}.}$$

2. *Calculer $F(0)$.*
   On a $\boxed{F(0)=\frac{1}{2}}$

3. *Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$. On notera G sa réciproque.*
   La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}>0$.
   La fonction F est donc strictement croissante et réalise, d'après le théorème de la bijection continue, une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]\lim_{-\infty}F,\lim_{+\infty}F\right[$.
   Or $\lim_{-\infty}F=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{0}e^{-t^2/2}\mathrm{dt}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}=0$ et
$$\lim_{\infty}F=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{dt}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1.$$
   Donc F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

4. *Soit $x\in\mathbb{R}$. Exprimer $F(-x)$ en fonction de $F(x)$.*
   Par définition
$$F(-x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{-x}e^{-t^2/2}\mathrm{dt}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x}e^{-t^2/2}\mathrm{dt}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x}e^{-t^2/2}\mathrm{dt}$$
   car la fonction $t\mapsto e^{-t^2/2}$ est paire. Donc
$$\boxed{F(-x)=1-F(x)}$$

5. *Soit $y\in]0,1[$. Exprimer $G(1-y)$ en fonction de $G(y)$.*
   On a
$$G(1-y)=G\left(1-F(G(y))\right)=G\left(F(-G(y))\right)=-G(y)$$

6. *Tracer le graphe de F et G.*

7. *Soit $x<0$. Montrer que $\forall u\in]-\infty,x]$, on a $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)h'(u)\le e^{-u^2/2}\le h'(u)$ où $h:\mathbb{R}^{-*}\to\mathbb{R},\ x\mapsto -\frac{1}{x}e^{-x^2/2}$.*
   La fonction Soit $u\in]-\infty,x]$, on a
$$h'(u)=\left(\frac{1}{u^2}+1\right)e^{-u^2/2}\ge e^{-u^2/2}$$
   Comme $u\le x<0$, $x^2\le u^2$ donc $1-\frac{1}{x^2}\le 1-\frac{1}{u^2}\le\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}$. Comme $f'(u)>0$, on a donc
$$\boxed{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)h'(u)\le e^{-u^2/2}\le h'(u)}$$

8. *En déduire que, pour tout $x<0$, on a*
$$-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}\le F(x)\le-\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}$$
   D'après la question précédente, pour tout $x<0$ et $A>-x$, on a :
$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)(h(x)-h(-A))\le\int_{-A}^{x}e^{-u^2/2}\mathrm{du}\le(h(x)-h(-A))$$
   Par croissance comparées, $\lim_{A\to+\infty}h(-A)=0$ donc :
$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)h(x)\le\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{x}e^{-u^2/2}\mathrm{du}\le h(x)$$
   i.e.
$$\boxed{-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}\le F(x)\le-\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}}$$

9. *En déduire un équivalent de F en $-\infty$ puis de $1-F$ en $+\infty$.*
   Soit $x<0$, on a
$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\le F(x)\frac{-x\sqrt{2\pi}}{e^{-x^2/2}}\le 1$$

Le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)\dfrac{-x\sqrt{2\pi}}{e^{-x^2/2}} = 1$ i.e.

$$\boxed{F(x) \underset{-\infty}{\sim} -\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}}$$

Comme, pour tout x, $F(-x) = 1 - F(x)$, on a :

$$\boxed{1 - F(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}}$$

10. *Trouver un équivalent de* $\ln F$ *en* $-\infty$.

    Comme $F(x) = -\dfrac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}\left(1 + \underset{+\infty}{o}(1)\right)$,

$$\ln F(x) = \ln\left(e^{-x^2/2}\right) - \ln\left(x\sqrt{2\pi}\right) + \ln\left(1 + \underset{+\infty}{o}(1)\right)$$

    Comme $\ln\left(x\sqrt{2\pi}\right) + \ln\left(1 + \underset{+\infty}{o}(1)\right) = \underset{+\infty}{o}(x^2)$, on a donc

$$\boxed{\ln F(x) \underset{-\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2}}$$

11. *Donnez un équivalent de* G *en* 0 *et en* 1.

    Comme $\lim\limits_0 G = -\infty$, on a $\ln F(G(x)) \underset{0}{\sim} -\dfrac{G(x)^2}{2}$ i.e. $G(x)^2 \underset{0}{\sim} -2\ln x$.
    Comme G est négative au voisinage de $-\infty$, on a donc :

$$\boxed{G(x) \underset{0}{\sim} -\sqrt{-2\ln x}}$$

    Comme, pour tout x, $G(1-x) = -F(x)$, on a :

$$\boxed{G(x) \underset{1}{\sim} \sqrt{-2\ln(1-x)}}$$