Devoir à rendre le 16/05/2025

Autour de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

I Calcul de l'intégrale $I = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$:

On considère pour cela la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\mathrm{d}t$

1. Calculez $f(0)$.
2. Soit $x \geq 0$. Montrer que $\frac{\pi}{4}e^{-2x} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}e^{-x}$.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. Prouver que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
5. Soit $u \in \mathbb{R}$. Montrer que $0 \leq e^u - 1 - u \leq \frac{1}{2}e^{|u|}u^2$.
6. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in [-1, 1]$. En déduire que

$$\left| f(x+h) - f(x) + h\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t \right| \leq \frac{2h^2}{3}e^{2|1-x|}$$

7. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de f' sous forme d'intégrale.
8. Prouver que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
9. En déduire l'existence et la valeur de I.
10. En déduire la valeur de $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ et $\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^0 e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

II Étude de la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$:

1. Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $F(0)$.
3. Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$. On notera G sa réciproque.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $F(-x)$ en fonction de $F(x)$.
5. Soit $y \in]0, 1[$. Exprimer $G(1-y)$ en fonction de $G(y)$.
6. Tracer le graphe de F et G.
7. Soit $x < 0$. Montrer que $\forall u \in]-\infty, x]$, on a $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)h'(u) \leq e^{-u^2/2} \leq h'(u)$ où $h : \mathbb{R}^{-*} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\frac{1}{x}e^{-x^2/2}$.
8. En déduire que, pour tout $x < 0$, on a

$$-\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} \leq F(x) \leq -\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}$$

9. En déduire un équivalent de F en $-\infty$ puis de $1 - F$ en $+\infty$.
10. Trouver un équivalent de $\ln F$ en $-\infty$.
11. Donnez un équivalent de G en 0 et en 1.