

devoir à rendre le 06/06/2025

Problème 1 :

On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules noires indiscernables au toucher.

On pose $N = N_1 + N_2$.

On répète l'expérience suivante : on tire au hasard une boule dans l'urne et l'on replace dedans deux boules de la couleur obtenue.

À l'issue de la première expérience, l'urne contient donc $N + 1$ boules et l'on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne. À l'issue de la deuxième expérience, l'urne contient donc $N + 2$ boules et l'on note X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne.

Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue de la k -ième expérience.

Pour tout k non nul, on note B_k l'évènement "la boule tirée lors de la k -ième expérience est blanche".

I. Étude d'un cas particulier :

On suppose ici que $N_1 = N_2 = 1$

1. Déterminer la loi de X_1 .

On a $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$ et $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = 1/2$ donc X_1 suit une loi uniforme sur $\{1, 2\}$.

2. Déterminer la loi de X_2 .

On a $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ puis

$$P(X_2 = 1) = P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}|\overline{B_1}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$P(X_2 = 3) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

et $P(X_2 = 2) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ donc X_2 suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que X_n suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$.

On pourra faire une récurrence et utiliser le système complet $((X_n = k))_{1 \leq k \leq n+1}$ pour déterminer la loi de X_{n+1} .

Montrons le résultat par récurrence. L'initialisation a déjà été faite.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que X_n suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$.

On a $X_{n+1}(\Omega) = \llbracket 1, n + 2 \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 1, n + 2 \rrbracket$, on a

$$P(X_{n+1} = k) = P(X_n = k \cap \overline{B_{n+1}}) + P(X_n = k - 1 \cap B_{n+1})$$

Or,

$$\begin{aligned} P(X_n = k \cap \overline{B_{n+1}}) &= P(X_n = k) P(\overline{B_{n+1}}|X_n = k) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} P(\overline{B_{n+1}}|X_n = k) & \text{si } k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} \frac{n+2-k}{n+2} & \text{si } k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(X_n = k - 1 \cap B_{n+1}) &= P(X_n = k - 1) P(B_{n+1}|X_n = k - 1) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} P(B_{n+1}|X_n = k - 1) & \text{si } k - 1 \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} \frac{k-1}{n+2} & \text{si } k - 1 \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, si $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$, alors

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1} \frac{n+2-k}{n+2} + \frac{1}{n+1} \frac{k-1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

et si $k = 1$ ou $k = n + 2$, alors $P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+2}$, donc X_{n+1} suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n + 2 \rrbracket$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité de B_{n+1} .

On pourra utiliser la question précédente et la formule des probabilités totales

On a $P(B_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} P(B_{n+1}|X_n = k)P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{n+2} \frac{1}{n+1}$ donc

$$P(B_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{1}{2}.$$

5. Pour tout entier n non nul, on considère la variable aléatoire $Y_n = \frac{X_n - 1}{n}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de Y_n .

Y_n suit une loi uniforme sur $\{k/n, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$

(b) Soit $x \in [0, 1]$.

Prouver que, pour tout entier n , on a $P(Y_n \leq x) = \frac{1}{n+1} \lfloor nx + 1 \rfloor$, où l'on note $\lfloor \cdot \rfloor$ la partie entière.

$$P(Y_n \leq x) = P(X_n \leq 1 + nx) = \frac{1}{n+1} \text{Card}(\mathbb{N} \cap [1, 1 + nx]).$$

Or, $\text{Card}(\mathbb{N} \cap [1, 1 + nx]) = \text{Card}(\mathbb{N} \cap [1, \lfloor nx + 1 \rfloor]) = \lfloor nx + 1 \rfloor$ d'où le résultat.

(c) Pour tout réel x , déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n \leq x)$.

Soit $x \in [0, 1]$. Comme $nx - 1 \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx$, on a le résultat par encadrement.

Si $x \leq 0$ on a pour tout n $P(Y_n \leq x) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n \leq x) = 0$ et

de même si $x \geq 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n \leq x) = 1$

III. Retour au cas général :

1. Déterminer la probabilité des évènements B_1 et B_2 .

Le tirage ayant lieu "au hasard", il y a équiprobabilité donc $P(B_1) = \frac{N_1}{N}$.

En utilisant la formule des probabilités totales, on a

$$P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|\overline{B_1})P(\overline{B_1}) = \frac{N_1 + 1}{N + 1} \frac{N_1}{N} + \frac{N_1}{N + 1} \frac{N_2}{N}$$

donc

$$P(B_2) = \frac{N_1(N_1 + N_2 + 1)}{N(N + 1)} = \frac{N_1}{N}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

(a) Montrer que $\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} k P(X_{n-1} = k) = (N + n - 1)P(B_n)$.

En utilisant la formule des probabilités totales pour le système complet $(X_{n-1} = k)_{N_1 \leq k \leq N_1+n-1}$, on a

$$P(B_n) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(B_n|X_{n-1} = k)P(X_{n-1} = k)$$

donc

$$P(B_n) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \frac{k}{N + n - 1} P(X_{n-1} = k)$$

(b) Soit $k \in \llbracket N_1, N_1 + n - 1 \rrbracket$.

Déterminez la probabilité de B_{n+1} sachant $B_n \cap (X_{n-1} = k)$ puis la probabilité de B_{n+1} sachant $\overline{B_n} \cap (X_{n-1} = k)$

On a $P(B_{n+1}|B_n \cap "X_{n-1} = k") = \frac{k+1}{N+n}$ et $P(B_{n+1}|\overline{B_n} \cap "X_{n-1} = k") =$

$$\frac{k}{N+n}$$

(c) En déduire que $P(B_{n+1}) = P(B_n)$.

En utilisant la formule des probabilités totales, on a

$$P(B_{n+1}) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(B_{n+1}|B_n \cap "X_{n-1} = k")P(B_n \cap "X_{n-1} = k") + \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(B_{n+1}|\overline{B_n} \cap "X_{n-1} = k")P(\overline{B_n} \cap "X_{n-1} = k")$$

donc

$$P(B_{n+1}) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \frac{k+1}{N+n} P(B_n \cap "X_{n-1} = k") + \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \frac{k}{N+n} P(\overline{B_n} \cap "X_{n-1} = k")$$

d'où en regroupant les termes

$$P(B_{n+1}) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \frac{k}{N+n} P(X_{n-1} = k) + \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \frac{1}{N+n} P(B_n \cap "X_{n-1} = k")$$

D'après la question 2.a, on en déduit

$$P(B_{n+1}) = \frac{N+n-1}{N+n} P(B_n) + \frac{1}{N+n} P(B_n)$$

puis $P(B_{n+1}) = P(B_n)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente la probabilité de B_n et l'espérance de X_n .

Pour tout n , on a $P(B_n) = \frac{N_1}{N}$. On a donc $E(X_{n-1}) = (N + n - 1) \times \frac{N_1}{N}$ donc

$$E(X_n) = (N + n) \frac{N_1}{N}$$

Problème 2 :

On se propose d'étudier le modèle de diffusion d'Ehrenfest.

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux N boules avec $N \in \mathbb{N}^*$.

À chaque étape, on choisit de façon équiprobable un entier entre 1 et N . Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules contenues dans l'urne U_1 , alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 ; sinon, on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 à l'étape n . La variable aléatoire X_0 est donc égale au nombre de boules initialement présentes dans l'urne U_1 , la variable aléatoire X_1 est égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 après un échange, ...

Par exemple, si l'urne U_1 contient initialement 3 boules et l'urne U_2 en contient 2, alors $N = 5$ et $X_0 = 3$.

On choisit alors un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 2, alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 et l'on a $X_1 = 2$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 3, alors on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1 et l'on a $X_2 = 3$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. À l'issue de l'échange, on aura $X_3 = 2$ avec une probabilité de $3/5$ et $X_3 = 4$ avec une probabilité de $2/5$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad Y_{n,k} = P(X_n = k).$$

I. Matrice de transition

1. On suppose que $N = 2$.

(a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $Y_{n+1} = A_2 Y_n$ avec $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, on a

$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^2 P(X_{n+1} = k | X_n = i) P(X_n = i)$$

Donc

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0) &= P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) P(X_n = 1) = 1/2 P(X_n = 1) \\ P(X_{n+1} = 1) &= P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) P(X_n = 0) + P(X_{n+1} = 1 | X_n = 2) P(X_n = 2) \\ &= P(X_n = 0) + P(X_n = 2) \\ P(X_{n+1} = 2) &= P(X_{n+1} = 2 | X_n = 1) P(X_n = 1) = 1/2 P(X_n = 1) \end{aligned}$$

ce qui se réécrit matriciellement $Y_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} Y_n$.

Une récurrence n'est pas nécessaire

(b) La matrice A_2 est-elle semblable à une matrice diagonale ?

On cherche une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, (e_1, e_2, e_3) tel qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $Ae_i = \lambda_i e_i$.

On s'intéresse donc aux réels λ tel que $\ker(A - \lambda I_3)$ ne soit pas réduit à $\{0\}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$rg(A_2 - \lambda I_3) = rg \begin{pmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{pmatrix} \stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} rg \begin{pmatrix} 0 & 1/2 - \lambda^2 & \lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

donc

$$rg(A_2 - \lambda I_3) = 1 + rg \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda^2 & \lambda \\ 1/2 & -\lambda \end{pmatrix} \stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} 1 + rg \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 & 0 \\ 1/2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Ainsi, les vecteurs à chercher appartiennent $\ker(A_2 - \lambda I_3)$ avec $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$.

Prenons e_1, e_2, e_3 des vecteurs non nuls tel que $A_2 e_1 = -e_1$, $A_2 e_2 = 0$ et $A_2 e_3 = e_3$. Montrons que (e_1, e_2, e_3) est libre.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$. On a alors $A_2(ae_1 + be_2 + ce_3) = 0 = -ae_1 + ce_3$ puis $(A_2 + I_3)(-ae_1 + ce_3) = 3ce_3$.

Comme $e_3 \neq 0$, c est nul puis, comme $e_1 \neq 0$, a est nul et enfin, comme $e_2 \neq 0$, b est nul.

La famille (e_1, e_2, e_3) est donc libre et de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. La matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A_2 dans la base (e_1, e_2, e_3) est alors diagonale donc A_2 est semblable à une matrice diagonale.

Dans toute la suite $N \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

2. On considère la matrice de $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/N & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 2/N & \ddots & & & \vdots \\ 0 & (N-1)/N & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & (N-1)/N & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2/N & 0 & 1 \\ 0 & & \dots & \dots & \dots & 1/N & 0 \end{pmatrix}$$

Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = AY_n$.

Une récurrence n'est pas nécessaire

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on a

$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^N P(X_{n+1} = k | X_n = i) P(X_n = i)$$

Si $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, alors

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= P(X_{n+1} = k | X_n = k-1) P(X_n = k+1) \\ &\quad + P(X_{n+1} = k | X_n = k+1) P(X_n = k+1) \\ &= \frac{N-k+1}{N} P(X_n = k-1) + \frac{k+1}{N} P(X_n = k+1) \end{aligned}$$

De plus,

$$P(X_{n+1} = 0) = P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) P(X_n = 1) = \frac{1}{N} P(X_n = 1)$$

et

$$P(X_{n+1} = N) = P(X_{n+1} = N | X_n = N-1) P(X_n = N-1) = \frac{1}{N} P(X_n = N-1)$$

Ainsi, $Y_{n+1} = AY_n$.

3. On note tA la matrice transposée de A . Déterminer lorsque $N = 2$ et $N = 3$, le noyau de ${}^tA - I_{N+1}$.

$$\text{On a } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1({}^tA_2) \text{ ssi } \begin{cases} y = x \\ x+z = 2y \\ y = z \end{cases} \text{ ssi } x = y = z.$$

$$\text{Ainsi, } E_1({}^tA_2) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_1({}^tA_3) \text{ ssi } \begin{cases} y = x \\ x+2z = 3y \\ 2y+t = 3z \\ z = t \end{cases} \text{ ssi } x = y = z = t.$$

$$\text{Ainsi, } E_1({}^tA_3) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Prouver que, dans le cas général, le noyau de ${}^tA - I_{N+1}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

$$\text{Posons } X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ on a } {}^tAX = X.$$

Comme $X \neq 0$, le noyau de ${}^tA - I_{N+1}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

5. En déduire que le noyau de $A - I_{N+1}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Comme il existe X non nul tel que $({}^tA - I_{N+1})X = 0$, la matrice ${}^tA - I_{N+1} = {}^t(A - I_{N+1})$ est non inversible.

Comme elle est de même rang que $A - I_{N+1}$, il existe un vecteur Y non nul tel que $(A - I_{N+1})Y = 0$. Donc le noyau de $A - I_{N+1}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

II. Détermination de l'espérance de la variable aléatoire X_n

Dans la suite, $n \in \mathbb{N}$ est fixé.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire $X_{n+1} - X_n$?

A chaque étape, le nombre de boules dans l'urne U_1 ne peut qu'augmenter ou diminuer de 1 donc $(X_{n+1} - X_n)(\Omega) = \{1, -1\}$.

2. En déduire que $E(X_{n+1} - X_n) = 1 - \frac{2}{N}E(X_n)$.

On pourra utiliser le système complet (" $X_n = k$ ") $_{0 \leq k \leq N}$

On a $E(X_{n+1} - X_n) = P(X_{n+1} - X_n = 1) - P(X_{n+1} - X_n = -1)$.

Or,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} - X_n = 1) &= \sum_{k=0}^N P(X_{n+1} - X_n = 1 | X_n = k) P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^N P(X_{n+1} = k+1 | X_n = k) P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{N-k}{N} P(X_n = k) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} - X_n = -1) &= \sum_{k=0}^N P(X_{n+1} - X_n = -1 | X_n = k) P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^N P(X_{n+1} = k-1 | X_n = k) P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{k}{N} P(X_n = k) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1} - X_n) &= - \sum_{k=0}^N \frac{k}{N} P(X_n = k) + \sum_{k=0}^N \frac{N-k}{N} P(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^N \frac{N-2k}{N} P(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^N P(X_n = k) - \frac{2}{N} \sum_{k=0}^N k P(X_n = k) = 1 - 2E(X_n)
\end{aligned}$$

3. En déduire l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n et de $E(X_0)$.

Par linéarité de l'espérance, on a $E(X_{n+1}) = 1 + \frac{N-2}{N}E(X_n)$. La suite $(E(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite arithmético-géométrique. La suite $\left(E(X_n) - \frac{N}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{N-2}{N}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $E(X_n) = \frac{N}{2} + \left(\frac{N-2}{N}\right)^n \left(E(X_0) - \frac{N}{2}\right)$

4. On suppose $N > 2$. Déterminer la limite de $E(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et en donner une interprétation.

Comme $\frac{N-2}{N} \in [0, 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{N-2}{N}\right)^n = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N}{2} = \frac{N}{2}$.

Donc, la valeur moyenne du nombre de boules dans l'urne U_1 tend vers $N/2$ c'est-à-dire la moitié des boules initialement présentes dans l'urne U_1 et ce résultat ne dépend pas de la composition initiale de l'urne.

III. Étude de la probabilité stationnaire

On s'intéresse dans cette question au noyau de $A - I_{N+1}$ que l'on notera E_1 .

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in E_1$. Prouver que pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $x_k = \binom{N}{k} x_0$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on pose $H(k) = "x_k = \binom{N}{k} x_0"$.

Comme $\binom{N}{0} x_0 = x_0$, $H(0)$ est vérifiée. On a $AX = X$ et en particulier, $\frac{1}{N} x_1 =$

x_0 donc $x_1 = N x_0 = \binom{N}{1} x_0$ donc $H(1)$ est également vérifiée.

Soit $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ tel que $H(k)$ et $H(k-1)$ soient vraies.

On a $AX = X$ et en particulier, $\frac{N-k+1}{N} x_{k-1} + \frac{k+1}{N} x_{k+1} = x_k$ puis

$$\begin{aligned}
(k+1)x_{k+1} &= Nx_k - (N-k+1)x_{k-1} = N \binom{N}{k} x_0 - (N-k+1) \binom{N}{k-1} x_0 \\
&= N! \left(\frac{N}{k!(N-k)!} - \frac{N-k+1}{(k-1)!(N-k+1)!} \right) x_0 \\
&= N! \frac{N(N-k+1) - (N-k+1)k}{k!(N-k+1)!} x_0 = N! \frac{N-k}{k!(N-k)!} x_0 \\
&= N! \frac{N!}{k!(N-k-1)!} x_0
\end{aligned}$$

donc $x_{k+1} = \frac{N!}{(k+1)!(N-k-1)!} x_0$ donc $H(k+1)$ est vraie.

2. En déduire la dimension de E_1 .

En notant $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in E_1$ avec, pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $x_k = \binom{N}{k} x_0$, on a prouvé que $E_1 = \text{Vect} X$.

Comme X est non nul, E_1 est de dimension 1.

3. Calculez la somme $S = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k}$.

D'après la formule du binôme de Newton, on a $S = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} 1^k 1^{N-k} = 2^N$.

4. Prouver qu'il existe un unique vecteur $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$ tel que $\sum_{k=0}^N \pi_k = 1$.

On donnera son expression.

Si un tel vecteur existe, alors il est colinéaire au vecteur X donc de la forme λX puis $\sum_{k=0}^N \pi_k = \lambda S = 1$ et enfin $\lambda = 2^{-N}$.

Réciproquement, le vecteur $2^{-N} X$ convient.

5. On considère la variable aléatoire X_∞ telle que :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, P(X_\infty = k) = \pi_k.$$

Quelle est la loi suivie par X_∞ . Donner son espérance et sa variance.

X_∞ suit une loi binomiale de paramètres $N, 1/2$. Donc son espérance est $N/2$ et sa variance $N/4$.

6. On suppose que X_0 suit la même loi que X_∞ .

Déterminer la loi de X_n pour tout entier n et donner une interprétation.

Par récurrence, comme $Y_0 = \pi$, on a $Y_n = \pi$ pour tout n .

La loi binomiale de paramètres $N, 1/2$ est donc une loi stationnaire.