

devoir à rendre le 06/06/2026

Problème 1 :

On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules noires indiscernables au toucher. On pose $N = N_1 + N_2$.

On répète l'expérience suivante : on tire au hasard une boule dans l'urne et l'on replace dedans deux boules de la couleur obtenue.

À l'issue de la première expérience, l'urne contient donc $N + 1$ boules et l'on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne. À l'issue de la deuxième expérience, l'urne contient donc $N + 2$ boules et l'on note X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne.

Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue de la k -ième expérience.

Pour tout k non nul, on note B_k l'évènement "la boule tirée lors de la k -ième expérience est blanche".

I. Étude d'un cas particulier :

On suppose ici que $N_1 = N_2 = 1$

1. Déterminer la loi de X_1 .
2. Déterminer la loi de X_2 .
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que X_n suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$.
On pourra faire une récurrence et utiliser le système complet $((X_n = k))_{1 \leq k \leq n+1}$ pour déterminer la loi de X_{n+1} .

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité de B_{n+1} .
On pourra utiliser la question précédente et la formule des probabilités totales

5. Pour tout entier n non nul, on considère la variable aléatoire $Y_n = \frac{X_n - 1}{n}$.
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de Y_n .
 - (b) Soit $x \in [0, 1]$.
Prouver que, pour tout entier n , on a $P(Y_n \leq x) = \frac{1}{n+1} \lfloor nx + 1 \rfloor$, où l'on note $\lfloor \cdot \rfloor$ la partie entière.
 - (c) Pour tout réel x , déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n \leq x)$.

III. Retour au cas général :

1. Déterminer la probabilité des évènements B_1 et B_2 .
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
 - (a) Montrer que $\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} k P(X_{n-1} = k) = (N + n - 1)P(B_n)$.
 - (b) Soit $k \in \llbracket N_1, N_1 + n - 1 \rrbracket$.
Déterminez la probabilité de B_{n+1} sachant $B_n \cap (X_{n-1} = k)$ puis la probabilité de B_{n+1} sachant $\overline{B_n} \cap (X_{n-1} = k)$
 - (c) En déduire que $P(B_{n+1}) = P(B_n)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente la probabilité de B_n et l'espérance de X_n .

Problème 2 :

On se propose d'étudier le modèle de diffusion d'Ehrenfest. On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux N boules avec $N \in \mathbb{N}^*$. À chaque étape, on choisit de façon équiprobable un entier entre 1 et N . Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules contenues dans l'urne U_1 , alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 ; sinon, on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 à l'étape n . La variable aléatoire X_0 est donc égale au nombre de boules initialement présentes dans l'urne U_1 , la variable aléatoire X_1 est égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 après un échange, ...

Par exemple, si l'urne U_1 contient initialement 3 boules et l'urne U_2 en contient 2, alors $N = 5$ et $X_0 = 3$.

On choisit alors un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 2, alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 et l'on a $X_1 = 2$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 3, alors on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1 et l'on a $X_2 = 3$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. À l'issue de l'échange, on aura $X_3 = 2$ avec une probabilité de $3/5$ et $X_3 = 4$ avec une probabilité de $2/5$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix}$. On a donc :
 $\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, Y_{n,k} = P(X_n = k)$.

I. Matrice de transition

1. On suppose que $N = 2$.

(a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $Y_{n+1} = A_2 Y_n$ avec $A_2 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une récurrence n'est pas nécessaire

(b) La matrice A_2 est-elle semblable à une matrice diagonale?

Dans toute la suite $N \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

2. On considère la matrice de $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/N & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 2/N & \ddots & & & \vdots \\ 0 & (N-1)/N & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & (N-1)/N & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2/N & 0 & 1 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & \dots & \dots & \dots & 1/N & 0 \end{pmatrix}$$

Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = AY_n$. *Une récurrence n'est pas nécessaire*

3. On note ${}^t A$ la matrice transposée de A .

Déterminer lorsque $N = 2$ et $N = 3$, le noyau de ${}^t A - I_{N+1}$.

4. Prouver que, dans le cas général, le noyau de ${}^t A - I_{N+1}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

5. En déduire que le noyau de $A - I_{N+1}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

II. Détermination de l'espérance de la variable aléatoire X_n

Dans la suite, $n \in \mathbb{N}$ est fixé.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire $X_{n+1} - X_n$?

2. En déduire que $E(X_{n+1} - X_n) = 1 - \frac{2}{N}E(X_n)$.

On pourra utiliser le système complet (" $X_n = k$ ") $_{0 \leq k \leq N}$

3. En déduire l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n et de $E(X_0)$.

4. On suppose $N > 2$. Déterminer la limite de $E(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et en donner une interprétation.

III. Étude de la probabilité stationnaire

On s'intéresse dans cette question au noyau de $A - I_{N+1}$ que l'on notera E_1 .

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in E_1$.

Prouver que pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $x_k = \binom{N}{k} x_0$.

2. En déduire la dimension de E_1 .

3. Calculer la somme $S = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k}$.

4. Prouver qu'il existe un unique vecteur $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$ tel que $\sum_{k=0}^N \pi_k = 1$.

On donnera son expression.

5. On considère la variable aléatoire X_∞ telle que :

$$X_\infty(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, P(X_\infty = k) = \pi_k.$$

Quelle est la loi suivie par X_∞ ? Donner son espérance et sa variance.

6. On suppose que X_0 suit la même loi que X_∞ .

Déterminer la loi de X_n pour tout entier n et donner une interprétation.