Corrigé du devoir à rendre le 15/11/2024

Exercice 1 :

1. La fonction $\ln_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car la fonction ln l'est et que $\ln(a) \neq 0$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $\ln_a'(x) = \dfrac{1}{\ln(a)}\dfrac{1}{x}$.
   Ainsi, si $a > 1$ alors $\ln_a$ est de dérivée positive sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ donc croissante et si $a < 1$ alors $\ln_a$ est de dérivée négative sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ donc décroissante.
2. Soit $(x, y) \in \left(\mathbb{R}^{+\star}\right)^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\ln_a(xy) &= \frac{\ln(xy)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x)+\ln(y)}{\ln(a)} = \ln_a(x) + \ln_a(y) \\
\ln_a\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\ln(1/x)}{\ln(a)} = \frac{-\ln(x)}{\ln(a)} = -\ln_a(x) \\
\ln_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{1}{\ln(a)}\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{\ln(a)}(\ln x - \ln y) = \ln_a(x) - \ln_a(y) \\
\ln_a(x^n) &= \frac{\ln(x^n)}{\ln(a)} = \frac{n\ln(x)}{\ln(a)} = n\ln_a(x) \\
\ln_a(a^n) &= n\ln_a(a) = n
\end{aligned}$$

3. Si $a > 1$ alors la fonction $\ln_a$ est de dérivée strictement positive sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ donc établit une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\ln_a\left(\mathbb{R}^{+*}\right)$. Comme $\ln(a) > 0$ et comme
$$\lim_{x\to-\infty} \ln = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln = +\infty,$$
on a
$$\lim_{x\to-\infty} \ln_a = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln_a = +\infty,$$
donc $\ln_a$ établit une bijection de $\mathbb{R}^{+\star}$ dans $\mathbb{R}$
Si $a < 1$ alors la fonction $\ln_a$ est de dérivée strictement négative sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ donc établit une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\ln_a\left(\mathbb{R}^{+*}\right)$. Comme $\ln(a) < 0$, on a
$$\lim_{x\to-\infty} \ln_a = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln_a = -\infty,$$
donc $\ln_a$ établit une bijection de $\mathbb{R}^{+\star}$ dans $\mathbb{R}$
4. Par définition, $\exp_a$ établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+\star}$ Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+\star}$, on a
$$y = \exp_a(x) \Leftrightarrow \ln_a(y) = x \Leftrightarrow \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = x \Leftrightarrow \ln(y) = x\ln(a) \Leftrightarrow y = \exp(x\ln(a)) = a^x$$
   Ainsi, on a
$$\boxed{\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+\star},\ x \mapsto a^x}$$

Exercice 2 :

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(*) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y)$. On a
$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} + \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{-x-y}}{4} \\
&= \boxed{\mathrm{sh}(x+y)}
\end{aligned}$$
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a
$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(e^{kx+y} - e^{-kx-y}\right)}{2} = \frac{e^y}{2}\sum_{k=0}^{n} e^{kx} - \frac{e^{-y}}{2}\sum_{k=0}^{n} e^{-kx}$$
   Si $x \neq 0$, alors $e^x \neq 1$ et $e^{-x} \neq 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{kx} = \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x}$ et
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{-kx} = \frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$ puis
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx+y) &= \frac{e^y}{2}\frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x} - \frac{e^{-y}}{2}\frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \\
&= \frac{e^y}{2}\frac{e^{(n+1)x/2}\left(e^{-(n+1)x/2} - e^{(n+1)x/2}\right)}{e^{x/2}\left(e^{-x/2} - e^{x/2}\right)} \\
&\quad - \frac{e^{-y}}{2}\frac{e^{-(n+1)x/2}\left(e^{(n+1)x/2} - e^{-(n+1)x/2}\right)}{e^{-x/2}\left(e^{x/2} - e^{-x/2}\right)} \\
&= \frac{e^y e^{nx/2}}{2}\frac{\mathrm{sh}((n+1)x/2)}{\mathrm{sh}(x/2)} - \frac{e^{-y}e^{-nx/2}}{2}\frac{\mathrm{sh}((n+1)x/2)}{\mathrm{sh}(x/2)}
\end{aligned}$$
   Ainsi, si $x \neq 0$, alors
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx+y) = \mathrm{sh}(y+nx/2)\frac{\mathrm{sh}((n+1)x/2)}{\mathrm{sh}(x/2)}.}$$

et si $x = 0$, alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx+y) = (n+1)\mathrm{sh}(y)}$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{sh}(kx+y) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\left(e^{kx+y} - e^{-kx-y}\right)}{2} \\ &= \frac{e^y}{2}\left(1+e^x\right)^n - \frac{e^{-y}}{2}\left(1+e^{-x}\right)^n \\ &= \frac{e^y}{2} e^{nx/2} 2^n \mathrm{ch}^n(x/2) - \frac{e^{-y}}{2} e^{-nx/2} 2^n \mathrm{ch}^n(x/2)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{sh}(kx+y) = 2^n \mathrm{sh}(y+nx/2)\mathrm{ch}^n(x/2)}$$

Exercice 3 :

Soit $f : x \mapsto \arccos(\mathrm{th}x) + 2\arctan(e^x)$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}x \in]-1,1[$ et la fonction arccos est définie sur $[-1,1]$ donc la fonction $x \mapsto \arccos(\mathrm{th}x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

   Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \arctan x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto 2\arctan(e^x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

   Par suite, la fonction f est définie sur $\boxed{\mathbb{R}}$.

2. La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-1,1[$ et la fonction arccos est dérivable sur $[-1,1]$ donc la fonction $x \mapsto \arccos(\mathrm{th}x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \arctan x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto 2\arctan(e^x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Par suite, la fonction f est dérivable sur $\boxed{\mathbb{R}}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(1-\mathrm{th}^2 x\right)\frac{-1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2 x}} + \frac{2e^x}{1+e2x} = \sqrt{1-\mathrm{th}^2 x} + \frac{2e^x}{1+e^{2x}} \\ &= -\sqrt{\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}} + \frac{2e^x}{1+e^{2x}}\end{aligned}$$

   Comme $\mathrm{ch}x \geq 0$, on en déduit que

$$f'(x) = -\frac{1}{\mathrm{ch}x} + \frac{2e^x}{1+e^{2x}} = -\frac{2}{e^x+e^{-x}} + \frac{2e^x}{1+e^{2x}} = 0$$

   Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, on en déduit que la fonction f est constante. Or,

$$f(0) = \arccos(0) + 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{4} = \pi$$

   Le graphe de f est donc la droite d'équation $\boxed{y = \pi.}$