

Corrigé du devoir à rendre le 02/12/2024

Dans cet exercice, on étudie une équation différentielle fréquemment rencontrée en physique. On considère deux nombres réels positifs λ et ω_0 ainsi que l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = 0$$

Il s'agit de l'équation générale d'un oscillateur amorti de pulsation propre ω_0 et de coefficient d'amortissement λ .

Étude du régime libre :

1. Montrer que si y est solution de l'équation différentielle homogène, alors la quantité $E = (\omega_0^2 y^2 + y'^2)/2$ décroît au cours du temps. Cette quantité est proportionnelle à l'énergie du système.

Si y est solution de l'équation différentielle homogène, alors c'est une fonction deux fois dérivable et donc E est dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout réel t , on a

$$E'(t) = y'(t)y''(t) + \omega_0^2 y(t)y'(t) = -2\lambda y'^2(t) \leq 0$$

La fonction E est donc décroissante sur l'intervalle \mathbb{R} .

2. Donner la forme générale des solution suivant que l'on se trouve dans l'un des trois cas suivants :

- $\lambda < \omega_0$ (régime pseudo-périodique),
- $\lambda = \omega_0$ (régime critique)
- $\lambda > \omega_0$ (régime aperiodique).

— Si $\lambda < \omega_0$ (régime pseudo-périodique), alors le discriminant Δ est négatif. L'équation caractéristique admet donc deux racines complexes conjuguées

$$r = -\lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}. \text{ L'ensemble des solutions est donc}$$

$$\{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^{-\lambda t} \left(A \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t) + B \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t) \right), (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

— Si $\lambda = \omega_0$ (régime critique), alors le discriminant Δ est nul et l'équation caractéristique possède une racine double égale à $-\lambda$. L'ensemble des solutions est donc

$$\{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^{-\lambda t} (A + Bt), (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

— Enfin, si $\lambda > \omega_0$ (régime aperiodique), alors l'ensemble des solutions est

$$\{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto A e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + B e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Remarquons que dans tous les cas, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$.

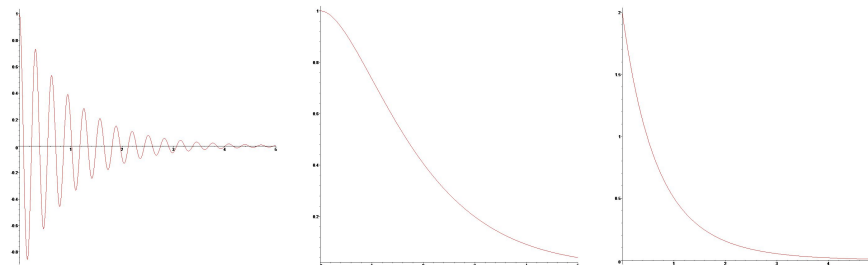


FIGURE 1 – Solution générale en régime pseudo-périodique, aperiodique critique et aperiodique

On se place maintenant dans le cas $\lambda < \omega_0$ et on note $E_n = E(t_n)$, l'énergie du système à l'instant $t_n = \frac{2n\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$.

3. Donner et tracez la solution qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

La solution de ce problème de Cauchy est

$$t \mapsto e^{-\lambda t} \left(\cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t \right) + \frac{\lambda}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t \right) \right)$$

ce que l'on peut réécrire

$$, t \mapsto \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} e^{-\lambda t} \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t + \phi \right)$$

où ϕ est un réel (unique modulo 2π) tel que

$$\cos \phi = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}{\omega_0} \text{ et } \sin \phi = -\frac{\lambda}{\omega_0}$$

par exemple $\phi = \arctan \left(\frac{-\lambda}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \right)$ (car $\cos \phi \geq 0$).

Le dessin correspond à celui de la question précédente.

4. Montrer que, pour cette solution,

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = e^{-\delta}$$

avec δ un réel à exprimer en fonction de λ et ω_0 . Ce nombre s'appelle le *décroissement logarithmique*. Il mesure à quelle vitesse le système perd de l'énergie. On commence par remarquer que, pour tout entier naturel n , on a $y'(t_n) = 0$. On a donc

$$E_n = \omega_0^2 y^2(t_n) = \omega_0^2 e^{-2\lambda t_n}$$

Puis

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = e^{-2\lambda(t_{n+1}-t_n)} = e^{-\frac{4\lambda\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}}$$

On obtient bien l'écriture demandée avec $\delta = \frac{4\lambda\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$.

5. Montrer que δ est une fonction croissante de λ .

La fonction $\lambda \mapsto \frac{4\lambda\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$ est une fonction croissante de λ comme quotient d'une fonction croissante positive et d'une fonction décroissante positive sur $]0, \omega_0[$. Ceci montre que plus l'amortissement λ est grand, plus l'énergie décroît vite.

Étude du régime forcé :

On modifie maintenant l'équation différentielle en introduisant un terme de forçage sinusoïdal à la pulsation ω .

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = e^{i\omega t}$$

1. Expliquez pourquoi, le comportement d'une solution de cette équation différentielle lorsque t est suffisamment grand ne dépend pas des conditions initiales $y(0)$ et $y'(0)$.

Une solution de l'équation différentielle linéaire s'écrit comme la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée. On a vu que toutes les solutions de l'équation homogène tendent vers 0 lorsque le temps t tend vers $+\infty$. On peut donc dire que le comportement d'une solution de l'équation avec second membre est celui d'une solution particulière de cette équation, indépendamment des conditions initiales.

2. Trouvez une solution particulière de la forme $y(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$.

On recherche naturellement des solutions de la forme $t \mapsto H(\omega)e^{i\omega t}$. On obtient alors :

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}$$

Pour étudier la fonction $H(\omega)$, on pose $m = \lambda/\omega_0$, $x = \omega/\omega_0$ et on définit la fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^2 + 2imx}$$

3. Tracez le graphe de l'argument principal (entre $-\pi$ et π) de f .

Si on note θ l'application qui à tout réel x positif fait correspondre l'argument principal de $f(x)$, alors $-\theta(x)$ est l'argument principal de $1 - x^2 + 2imx$. Si $x < 1$, alors $1 - x^2 \geq 0$ et on a

$$\theta(x) = -\arctan \frac{2mx}{1 - x^2}$$

En revanche, si $x > 1$, alors

$$\theta(x) = -\left(\pi - \arctan \frac{2mx}{-1 + x^2}\right) = -\pi - \arctan \frac{2mx}{1 - x^2}$$

Enfin $\theta(1) = -\pi/2$.

On dit qu'aux basses fréquences, la réponse du système est en phase avec l'excitation tandis qu'aux hautes fréquences, il sont en opposition de phase.

La fonction $x \mapsto \frac{x}{1 - x^2}$ étant croissante sur $[0, 1[$ et $[1, +\infty[$, on a le graphe suivant. On remarque que θ est continue.

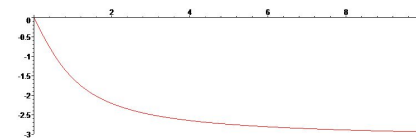


FIGURE 2 – Argument de $f(x)$ en fonction de x .

On dit qu'aux basses fréquences, la réponse du système est en phase avec l'excitation tandis qu'aux hautes fréquences, il sont en opposition de phase.

4. On suppose que $m < 1/\sqrt{2}$. Étudiez les variations de $g = |f|^2$ et montrer que g possède un maximum global g_m que l'on tracera en fonction de m .

On a, pour tout réel x , $g(x) = \frac{1}{(1 - x^2)^2 + 4m^2x^2}$

On remarque que g est une fonction dérivable sur \mathbb{R}^+ et que sa dérivée est donnée par

$$g'(x) = -4 \frac{(x^2 - (1 - 2m^2))x}{((1 - x^2)^2 + 4m^2x^2)^2}$$

Comme $m < 1/\sqrt{2}$, la fonction g' s'annule en $x_m = \sqrt{1 - 2m^2}$. Elle est positive pour $x \leq x_m$ et négative pour $x \geq x_m$, ce qui montre qu'elle admet un unique maximum global $g_m = g(x_m)$ donné par

$$g_m = \frac{1}{(1 - x_m^2)^2 + 4m^2 x_m^2} = \frac{1}{(2m^2)^2 + 4m^2(1 - 2m^2)} = \frac{1}{4m^2(1 - m^2)}$$

La fonction $x \mapsto x(1 - x)$ est croissante sur l'intervalle $[0, 1/2]$.

Comme $1/\sqrt{2} < 1/2$, la fonction $m \mapsto g_m$ est décroissante sur l'intervalle $]0, 1/\sqrt{2}[$. Autrement dit, plus l'amortissement est faible et plus le maximum de g est grand.

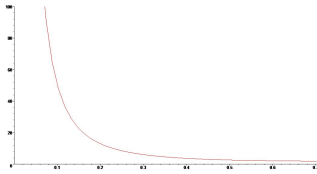


FIGURE 3 – Valeur de g_m en fonction de m .

5. Tracez le graphe de g en fonction de x . On distinguera les cas $m < 1/\sqrt{2}$ et $m > 1/\sqrt{2}$.

Il reste à traiter le cas où $m \geq 1/\sqrt{2}$. Dans ce cas, la fonction g est monotone et décroissante.

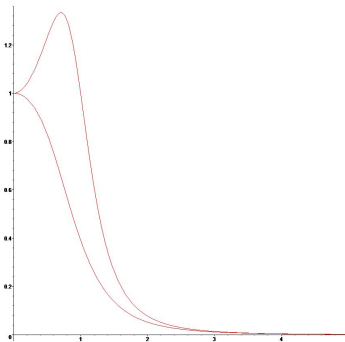


FIGURE 4 – Valeur de $g(x)$ en fonction de x pour $m = 0,5$ et $m = 0,8$.

Ce phénomène s'appelle la résonance. Si le système est peu amorti (m est petit), alors le maximum global g_m est grand. Remarquez que la condition pour observer une résonance est $m < 1/\sqrt{2}$ alors qu'en régime libre, on observe des oscillation si $m < 1$.