# Devoir à rendre le 02/12/2024

Dans cet exercice, on étudie une équation différentielle fréquemment rencontrée en Physique. On considère deux nombres réels positifs $\lambda$ et $\omega_0$ ainsi que l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = 0$$

Il s'agit de l'équation générale d'un oscillateur amorti de pulsation propre $\omega_0$ et de coefficient d'amortissement $\lambda$.

**Étude du régime libre :**

1. Montrer que si $y$ est solution de l'équation différentielle homogène, alors la quantité $E = (\omega_0^2 y^2 + y'^2)/2$ décroit au cours du temps. Cette quantité est proportionnelle à l'énergie du système.
2. Donner la forme générale des solution suivant que l'on se trouve dans l'un des trois cas suivants :
   — $\lambda < \omega_0$ (régime pseudo-périodique),
   — $\lambda = \omega_0$ (régime critique)
   — ou $\lambda > \omega_0$ (régime apériodique).

   On se place maintenant dans le cas $\lambda < \omega_0$ et on note $E_n = E(t_n)$ l'énergie du système à l'instant $t_n = \dfrac{2n\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$.
3. Donner et tracez la solution qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
4. Montrer que, pour cette solution,

   $$\frac{E_{n+1}}{E_n} = e^{-\delta}$$

   avec $\delta$ un réel à exprimer en fonction de $\lambda$ et $\omega_0$. Ce nombre s'appelle le décrément logarithmique. Il mesure à quelle vitesse le système perd de l'énergie.
5. Montrer que $\delta$ est une fonction croissante de $\lambda$.

**Étude du régime forcé :**

On modifie maintenant l'équation différentielle en introduisant un terme de forçage sinusoïdal à la pulsation $\omega$.

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = e^{i\omega t}$$

1. Expliquez pourquoi, le comportement d'une solution de cette équation différentielle lorsque $t$ est suffisamment grand ne dépend pas des conditions initiales $y(0)$ et $y'(0)$.
2. Trouvez une solution particulière de la forme $y(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$.

   Pour étudier la fonction $H(\omega)$, on pose $m = \lambda/\omega_0$, $x = \omega/\omega_0$ et on définit la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ par

   $$f(x) = \frac{1}{1 - x^2 + 2imx}$$
3. Tracez le graphe de l'argument principal (appartenant à e $]-\pi, \pi]$) de $f$.

   On dit qu'aux basses fréquences, la réponse du système est en phase avec l'excitation tandis qu'aux hautes fréquences, il sont en opposition de phase.
4. On suppose maintenant que $m < 1/\sqrt{2}$. Étudiez les variations de $g = |f|^2$ et montrer que $g$ possède un maximum global $g_m$ que l'on tracera en fonction de $m$.
5. Tracez le graphe de $g$ en fonction de $x$. On distinguera les cas $m < 1/\sqrt{2}$ et $m > 1/\sqrt{2}$.

   Ce phénomène s'appelle la résonance. Si le système est peu amorti ($m$ est petit), alors le maximum global $g_m$ est grand. Remarquez que la condition pour observer une résonance est $m < 1/\sqrt{2}$ alors qu'en régime libre, on observe des oscillation si $m < 1$.