

Devoir à rendre le 6/01/2025

Exercice 1

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$. On définit la suite u par $u_0 \in \mathbb{C}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec} \quad f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a/c\}, z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

On suppose que u_0 est tel que la suite soit bien définie.

1. On suppose que u converge.
 - (a) Montrer que si u converge alors sa limite est racine d'une équation du second degré (*).
 - (b) Soit r une racine de (*). Montrer que $u_{n+1} - r = (u_n - r) \frac{ad - bc}{(cu_n + d)(cr + d)}$
 - (c) En déduire que u est constante si et seulement si un de ses terme est racine de (*)

Désormais on suppose que u n'est pas constante.

2. On suppose que (*) a deux racines distinctes r_1 et r_2 .
 - (a) Montrer que la suite $v = \left(\frac{u_n - r_1}{u_n - r_2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et géométrique de raison λ .
 - (b) En déduire u en fonction de λ
 - (c) En déduire la nature convergente ou divergente de u .
3. On suppose que (*) a une seule racine r_0 .
 - (a) Montrer que si $w = \left(\frac{1}{u_n - r_0} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = w_n + \frac{2c}{a + d}$$

- (b) En déduire la nature de u .

Exercice 2 :

Soit u la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{u_{n-1} + n}$.

1. Montrer que la suite u est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{n}$.
2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1 + x)$.
 (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$ puis que $u_n = o(n^2)$.
 (c) Montrer que $u_n = o(n)$ et en déduire un équivalent de u_n .
3. Soit $v = (u_n - \sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$. Prouver que la suite v converge et donner sa limite.
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_{n-1}$.
5. Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est de même signe que $1 + u_n - u_{n-1}$ et en déduire que la suite u est monotone à partir d'un certain rang.

Exercice 3 :

1. Prouver que, pour tout entier n non nul, l'équation $\frac{e^{-x^2}}{x} = \frac{1}{n}$ admet sur \mathbb{R}^{+*} une unique solution que l'on notera x_n .
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n^2 + \ln x_n = \ln n$. En déduire un équivalent de x_n .
4. Soit $u = (x_n - \sqrt{\ln n})_{n \in \mathbb{N}}$. Trouver un équivalent de u et sa limite.