Corrigé du devoir à rendre le 03/03/2025

Exercice 1 : Sous-groupes de $\mathbb{R}$
L'objectif de cet exercice est de démontrer que si $(G,+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ alors

— soit G est dense (i.e. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists z \in G$: $x < z < t$)
— soit G est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$.

Soit $(G,+)$ un sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à 0. On considère

$$G^+ = G \cap \mathbb{R}^{+*}$$

1. *Montrer que G^+ admet une borne inférieure appartenant à $\mathbb{R}^+$ notée a.*
   Soit g un élément de $G \setminus \{0\}$. Soit $g > 0$ et alors g est un élément de G^+ soit $g < 0$ et alors $-g$ est un élément de G^+ . Par suite G^+ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée. Elle possède donc une borne inférieure notée a.
   Comme 0 minore G^+, on en déduit que a est un réel positif.
2. *Montrer que si $a > 0$ alors $a \in G$ puis que $G = a\mathbb{Z}$.*
   Supposons, par l'absurde, que $a \notin G$.
   Par définition de la borne inférieure, comme $a < 2a$, il existe $g_1 \in G$ tel que $a \leq g_1 \leq 2a$ et comme $a \notin G$, on a $a < g_1 \leq 2a$ donc il existe $g_2 \in G$ tel que $a < g_2 < g_1 \leq 2a$.
   Comme g est un groupe $g_1 - g_2$ appartient à G^+. Or, $g_1 - g_2 < a$ ce qui contredit le fait que a soit la borne inférieure de G^+.
   Par conséquent, si $a > 0$ alors $a \in G$.
   Comme a appartient à G, le groupe qu'il engendre $a\mathbb{Z}$ est inclus dans G
   Réciproquement, soit $g \in G$. On note k la partie entière de g/a alors $ka \leq g < (k+1)a$ donc $g - ka \in G^+ \cap [0, a[$ i.e. $g = ka$.
   Par suite, $G = a\mathbb{Z}$.
3. *Montrer que si $a = 0$ alors G est dense.*
   Soient x et y deux réels tels que $x < y$ alors $y - x > 0$.
   Comme $a = 0$, $y - x$ n'est pas un minorant de G^+ donc il existe $g \in G^+$ tel que $0 < g \leq y - x$.
   On note k la partie entière de x/g alors $kg \leq x < (k+1)g \leq kg + y - x < y$.
   Or, comme somme d'éléments de G, $(k+1)g$ appartient à G.
   Le groupe G est donc dense dans $\mathbb{R}$.
4. *Application : soient a et b deux réels non nuls.*
   (a) *Montrer que $G_{a,b} = \{an + bm\ ,\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$*
   L'ensemble $G_{a,b}$ est inclus dans $\mathbb{R}$, contient 0, est stable par la loi + ($(an+bm)+(an'+bm') = a(n+n')+b(m+m')$) et passage à l'inverse ($-(an+bm) = a(-n) + b(-m)$) donc $G_{a,b}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.
   (b) Supposons que $G_{a,b}$ ne soit pas dense. Il existe donc un réel c tel que $G_{a,b} = c\mathbb{Z}$.
   En particulier, il existe des entiers k et k' non nuls tels que $a = kc$ et $b = k'c$ donc $a/b = k/k'$ est un rationnel.
   (c) Supposons que a/b soit rationnel alors il existe deux entiers k et k' premiers entre eux tels que $a/b = k/k'$.
   On pose $c = a/k = b/k'$. Ainsi, pour tout couple (n,m) d'entiers relatifs, $an + bm = c(kn + k'm)$ donc $G_{a,b} \subset c\mathbb{Z}$.
   Réciproquement, comme k et k' sont premiers entre eux, il existe des entiers r et t tels que $rk + tk' = 1$. En particulier, $c = c(rk + tk') = ar + bt \in G_{a,b}$.
   Le groupe engendré par c est donc inclus dans $G_{a,b}$.
   Par conséquent, $G_{a,b} = c\mathbb{Z}$ donc $G_{a,b}$ n'est pas dense.
   On a donc montré que $G_{a,b}$ est dense si et seulement si a/b est irrationnel.

Exercice 2 :
On note $p : x \mapsto e^x$, $q : x \mapsto e^{2x}$ et $r : x \mapsto e^{x^2}$. On note $\mathcal{B} = (p,q,r)$ et $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B}$.

1. *Prouver que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$* Par définition, la famille $\mathcal{B}$ engendre $\mathcal{E}$. Montrons que cette famille est libre.
   Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ap + bq + cr$ soit la fonction nulle. Alors :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ae^x + be^{2x} + ce^{x^2} = 0.$$
   En particulier, $a + b + c = 0$ et $ae + be^2 + ce = 0$, ce qui implique que $be^2 = be$ soit $b = 0$ et $a + c = 0$.
   De plus, $ae^{-1} + ce = 0$ donc $a = c = 0$.
   Par suite, la famille $\mathcal{B}$ est libre donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathcal{E}}$.

On note ψ l'application qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe le triplet de réels $\big(f(0), f'(0), f(1)\big)$.

2. *Prouvez que ψ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.*
   Montrons que ψ est une application linéaire bijective de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Soit $(f,g,\lambda) \in \mathcal{E}^2 \times \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\psi(f+\lambda g) &= \big((f+\lambda g)(0), (f+\lambda g)'(0), (f+\lambda g)(1)\big)\\ &= \big(f(0), f'(0), f(1)\big) + \lambda\big(g(0), g'(0), g(1)\big)\\ &= \psi(f) + \lambda\psi(g).\end{aligned}$$

Ainsi, ψ est une application linéaire.
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $f = Ap + Bq + Cr$. On a

$$\psi(f) = (a,b,c) \Longleftrightarrow \begin{cases} A+B+C = a\\ A+2B = b\\ Ae+Be^2+Ce = c\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A+B+C = a\\ B-C = b-a\\ e(e-1)B = c-ea\end{cases}$$

donc

$$\psi(f) = (a,b,c) \Longleftrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{c-ea}{e(e-1)} = \dfrac{-1}{e-1}a + \dfrac{1}{e(e-1)}c\\ C = \dfrac{e-2}{e-1}a - b - \dfrac{1}{e(e-1)}c\\ A = \dfrac{2}{e-1}a + b - \dfrac{2}{e(e-1)}c\end{cases}$$

donc tout élément de $\mathbb{R}^3$ admet un unique antécédent par ψ.
Ainsi, $\boxed{\psi \text{ est un isomorphisme de } \mathcal{E} \text{ dans } \mathbb{R}^3.}$

3. *Déterminer ψ^{-1}.*
   Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\boxed{\begin{aligned}\psi^{-1}((a,b,c)) = \left(\frac{2}{e-1}a - b - \frac{2}{e(e-1)}c\right)p + \left(\frac{c-ea}{e(e-1)} = \frac{-1}{e-1}a + \frac{1}{e(e-1)}c\right)q\\ + \left(\frac{e-2}{e-1}a - b - \frac{1}{e(e-1)}c\right)r.\end{aligned}}$$

On note φ l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe $\varphi(f) = Ap+Bq+Cr$ où

$$\begin{cases} A = \dfrac{2}{e-1}f(0) + f'(0) + \dfrac{2}{e(e-1)}f(1)\\ B = -\dfrac{1}{e-1}f(0) - \dfrac{1}{e(e-1)}f(1)\\ C = \dfrac{e-2}{e-1}f(0) - f'(0) - \dfrac{1}{e(e-1)}f(1)\end{cases}$$

4. *On note $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ invariants par f. Montrez que $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : f(1) = 0\}$. Déterminer une équation de $\mathcal{P}$ dans la base $\mathcal{B}$; exhibez une base (e_1, e_2) de $\mathcal{P}$.*
   Soit $f \in \mathcal{E}$.
   Comme ψ est bijective, $\varphi(f) = f$ si, et seulement si, $\psi(\varphi(f)) = \psi(f)$. Or,

$$\psi(\varphi(f)) = \big(f(0), f'(0), -f(1)\big)$$

   donc $\varphi(f) = f$ si, et seulement si, $f(1) = 0$ i.e. $\boxed{\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : f(1) = 0\}}$.
   Soit $f = Ap + Bp + Cr \in \mathcal{P}$, on a $f \in \mathcal{P}$ si, et seulement si, $f(1) = 0$ donc si, et seulement si, $Ae + Be^2 + Ce = 0$.
   Une équation de $\mathcal{P}$ dans la base $\mathcal{B}$ est donc $\boxed{A + eB + C = 0}$.
   Ainsi, $\mathcal{P} = \{Ap+Bq-(A+eB)r,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(p-r, q-er)$ i.e. la famille $(p-r, q-er)$ engendre $\mathcal{P}$. Comme les fonctions $\boxed{e_1 = p-r}$ et $\boxed{e_2 = q-er}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que $\boxed{\text{la famille } (e_1,e_2) \text{est une base de } \mathcal{P}}$.

5. *On note $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = -f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ transformés en leur opposé par f. Déterminez des équations de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$. Exhibez une base (e_3) de $\mathcal{D}$, et donnez une caractérisation des éléments de $\mathcal{D}$.*
   Soit $f \in \mathcal{E}$.
   Comme ψ est bijective, $\varphi(f) = -f$ si, et seulement si, $\psi(\varphi(f)) = -\psi(f)$. Or,

$$\psi(\varphi(f)) = \big(f(0), f'(0), -f(1)\big)$$

   donc $\varphi(f) = -f$ si, et seulement si, $f(0) = f'(0) = 0$ i.e.

$$\boxed{\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{E} : f(0) = f'(0) = 0\}}$$

   Soit $f = Ap + Bp + Cr \in \mathcal{P}$, on a $f \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, $f(0) = f'(0) = 0$ donc si, et seulement si, $A + B + C = A + 2B = 0$.
   Une équation de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$ est donc $\boxed{A + B + C = A + 2B = 0}$.
   Ainsi, $\mathcal{D} = \{Ap - \dfrac{A}{2}q - fracA2r,\ A \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(2p - q - r)$ i.e. la famille $(2p - q - r)$ engendre $\mathcal{P}$. Comme la fonction $\boxed{e_3 = 2p - q - r}$ est non nulle, on en déduit que $\boxed{\text{la famille } (e_3) \text{ est une base de } \mathcal{D}}$.

6. *Montrez que $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.*
   Montrons que $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \{0\}$.
   Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}$, alors $\varphi(f) = f = -f$ donc $f = 0$.
   Les sev $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont donc en somme directe.
   Soit $f = Ap + Bq + Cr \in \mathcal{E}$. Si on pose

$$\begin{cases} a = \dfrac{1+e}{e-1}A - \dfrac{2e}{1-e}B - \dfrac{2}{1-e}C\\ b = \dfrac{A+B+C}{1-e}\\ c = \dfrac{1}{1-e}A + \dfrac{e}{1-e}B + \dfrac{1}{1-e}C\end{cases}$$

alors $f = ae_1 + be_2 + ce_3$ donc $f \in \mathcal{P} + \mathcal{D}$.

Par conséquent, $\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}}$.

Ainsi : $\boxed{\phi \text{ est la symétrie par rapport à } \mathcal{P} \text{ parallèlement à } \mathcal{D}}$

7. *Prouver que $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathcal{E}$.*

   On a déjà prouvé que (e_1, e_2, e_3) engendre $\mathcal{E}$.

   Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$, alors $ae_1 + be_2 = -ce_3 \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}$ donc $c = 0$ et $ae_1 + be_2 = 0$ donc $a = b = c = 0$ ce qui prouve la liberté de la famille (e_1, e_2, e_3).

   Ainsi, $\boxed{\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } \mathcal{E}}$.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ dont le terme constant est nul. On identifie un polynôme P et la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ qui lui est naturellement associée.

8. *Montrez que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et en donner une base*

   Comme $\mathcal{F}$ est le noyau de l'application linéaire $\Theta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto P(0)$, $\boxed{\mathcal{F} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X]}$.

   La famille $\left(X^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ engendre $\mathcal{F}$ et est échelonnée en degré donc libre. Ainsi : $\boxed{\left(X^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est une base de } \mathcal{F}.}$

Soit $(P_k)_{1 \leq k \leq q}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ vérifiant la condition suivante :

$$\forall k \in [\![1, q]\!], \quad \lim_{x \to +\infty} P_{k+1}(x) - P_k(x) = +\infty$$

On note $f_k = \exp \circ P_k$ l'application qui, à $x \in \mathbb{R}$, associe $f_k(x) = e^{P_k(x)} = \exp\big(P_k(x)\big)$.

9. *Montrez que la famille $(f_k)_{1 \leq k \leq q}$ est libre.*

   Soit $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq q}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{q} \lambda_k f_k = 0$. Montrons que $\lambda_1 = ... = \lambda_q = 0$.

   Supposons, par l'absurde, que $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq q}$ soit non nul, alors l'ensemble $\{k \in [\![1, q]\!]\ :\ \lambda_k = 0\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide ; elle admet donc un plus petit élément que l'on note r.

   On a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k f_k = f_r \left(\lambda_r + \sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k e^{P_k - P_r}\right)$ donc $\displaystyle\lambda_r + \sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k e^{P_k - P_r} = 0$

   Or, pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$,

$$e^{P_k - P_r} = \prod_{j=k}^{r-1} e^{P_j - P_{j+1}}$$

   donc $\displaystyle\lim_{+\infty} e^{P_k - P_r} = 0$.

   Par suite, $\lambda_r = 0$ ce qui contredit l'hypothèse initiale.

   Par conséquent, $\boxed{\text{la famille } (f_k)_{1 \leq k \leq q} \text{ est libre.}}$