

Nombres réels

Exercice 1 :

1. Montrer qu'une intersection de deux intervalles est encore un intervalle.
2. Montrer que l'union de deux intervalles non disjoints est encore un intervalle.

Exercice 2 :

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

1. $E(x) + E(x+y) + E(y) \leq E(2x) + E(2y)$
2. $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$
3. $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$

Exercice 3 :

Soit A une partie de \mathbb{R} non vide.

1. Justifier que la fonction $d_A : x \mapsto \inf\{|x - a|, a \in A\}$ est correctement définie sur \mathbb{R} .
2. Prouver que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |d_A(x) - d_A(y)| \leq |x - y|$.

Exercice 4 :

Soient A et B deux parties non vides majorées de \mathbb{R}

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose $\lambda A = \{\lambda a, a \in A\}$.
Déterminer $\text{Sup}(\lambda A)$ en fonction de $\text{Sup}(A)$.
2. Montrer que $\text{Sup}(A+B) = \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B)$ où $A+B = \{a+b, (a, b) \in A \times B\}$.
3. On suppose que $A \cup B \subset \mathbb{R}^+$.
Montrer que $\text{Sup}(A \cdot B) = \text{Sup}(A) \times \text{Sup}(B)$ où $A \cdot B = \{ab, (a, b) \in A \times B\}$.

Exercice 5 :

On cherche toutes les applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

1. Montrer que si f est solution alors il existe une constante c telle que

$$\forall x \in \mathbb{Q} \quad f(x) = cx$$

2. Montrer que si f est une solution non nulle alors f est positive sur \mathbb{R}^+ et croissante sur \mathbb{R} .
3. En déduire que si f est solution alors $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = cx$
4. Conclure.