Lycée Saint-Louis — TD 11
MPSI

Suites numériques

Exercice 1 :

1. Soit u une suite périodique. Donner une CNS pour que u soit convergente.
2. Soit u une suite d'entiers relatifs. Donner une CNS pour que u soit convergente.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
   (a) Étudier la convergence de la suite $(\sin(n\theta)))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque θ/π est rationnel.
   (b) Montrer que si la suite $(\sin(n\theta)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors les suites $(\sin(2n\theta)))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(2n\theta)))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
   (c) En déduire la nature de la suite $(\sin(n\theta)))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 : Soit $u \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Que peut-on en déduire si $\ell > 1$? Peut-on conclure quelque chose si $\ell = 1$?

Exercice 3 :
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que les suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que u converge.

Exercice 4 : Étudier la convergence des suites suivantes :

1. $\dfrac{\sin(n) + 4(-1)^n}{n}$;
2. $\dfrac{n^2+n-1}{n+40}$;
3. $\dfrac{n^2+n+1-\cos(n)}{2n^2+\sin(n)\cos(n)}$;
4. $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ $(x \in \mathbb{R})$
5. $(1+x^n)^{1/n}$ $(x \in]0,1[)$
6. $\dfrac{n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$;
7. $\sqrt{n^2+n} - n$;
8. $\dfrac{a^n-1}{a^n+1}$ $(a>0)$;
9. $\sin(\pi\sqrt{n^2+an+b})$.
10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$

Exercice 5 :

1. Montrer que les suites $v = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $w = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent.
2. Pour tout entier n, on pose $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t \,\mathrm{d}t$.
   Pour tout entier n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
3. En déduire, pour tout entier n, une expression de u_n et l'encadrement
   $$0 \leq u_n \leq \frac{e}{n!}.$$
4. En déduire la limite des suites v et w.
5. Montrer que e est irrationnel.

Exercice 6 : Moyenne arithmetico-géométrique
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^+*)^2$. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$a_0 = a,\ b_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}$$

Montrer que ces deux suites convergent.

Exercice 7 : Moyenne de Césaro

Soit u une suite complexe, et v la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

1. Montrer que si u converge vers ℓ, alors v converge aussi vers ℓ.
   La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose u réelle et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ tend vers ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors $(\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (resp. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) telle que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$).
   Montrer que $\dfrac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\sqrt[n]{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
6. Une réciproque partielle : Montrer que si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est monotone et si la suite $\left(\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$.