Suites numériques 2

Exercice 1 : Trouver l'ensemble des suites complexes (resp. réelles) telles que

1. $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
2. $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$
3. $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$
4. $u_{n+2} = 2\sin\theta u_{n+1} - u_n$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Montrer que si u et v sont deux suites réelles convergentes alors la suite $w = (\max(u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 3 :
Soit u définie par $u_0 \geq -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. Prouver que la suite u est bien définie.
2. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

Exercice 4 :
Soit u définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.

1. Prouver que la suite u est bien définie.
2. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

Exercice 5 :
Soit u définie par $u_0 \in [1, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$.

1. Prouver que la suite u est bien définie.
2. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

Exercice 6 :
Soit u définie par $u_0 \in [-2, 2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$.

1. Prouver que la suite u est bien définie.
2. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

Exercice 7 : Trouver des équivalents simples des suites suivantes :

1. $\dfrac{n^3+2n+5}{n+6}$
2. $\dfrac{n^3+2n+5}{2^n}$
3. $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$
4. $\sin(2^{-n})$
5. $\sqrt{n} - \sqrt{n+1}$
6. $\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1}$
7. $(n + \ln n)e^{-n}$.
8. $\ln(n^2+2)$
9. $\left(1 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)^n$

Exercice 8 :
Montrer que les suites de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

convergent.
En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 9 :

1. Pour tout entier n, montrer qu'il existe un unique réel $u_n \in \left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan u_n = n$.
2. Montrer que $u_n \sim n\pi$.
3. Prouver que la suite $v = (u_n - n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite ℓ.
4. Donner un équivalent simple w_n de $v_n - \lim v$.

Exercice 10 : Soit u une suite décroissante telle que $u_{n+1} + u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Montrer que u converge et en donner un équivalent.