Dérivation

Exercice 1 : Étudier les limites en a des fonctions suivantes

1. $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}$
2. $x \mapsto \dfrac{a \sin x - x \sin a}{x - a}$
3. $x \mapsto \dfrac{x^{3/2} - a^{3/2} + (x-a)^{3/2}}{x - a - \sqrt{x^2 - a^2}}$

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en a

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(a+x) - f(a-x)}{2x}$ admet une limite en 0
2. Étudier la réciproque

Exercice 3 : Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivable sur I.

1. Soit $(a, b) \in I^2$ tels que $f'(a)f'(b) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Il s'agit du théorème de Darboux selon lequel, une dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires (même si elle n'est pas nécessairement continue)

Exercice 4 :

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ telles que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.
   (a) Prouver qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.
   On utilisera une fonction de la forme $f - \lambda g$.
   (b) En déduire que si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$
   (c) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.
2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $]a, b[$ telles que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$. On suppose que $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} g = 0$ et $\lim\limits_{a} \dfrac{f'}{g'} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
   Prouver que $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = \ell$.

Exercice 5 : Déterminer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$
3. $x \mapsto e^x \sin x$
4. $x \mapsto x^2(1+x)^n$

Exercice 6 : Soit f dérivable n fois dérivable sur $[a, b]$. Monter que si f s'annule $n+1$ fois sur $[a, b]$ alors $f^{(n)}$ s'annule sur $[a, b]$.

Exercice 7 :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$ et $c \in]a, b[$.
En utilisant la fonction $\phi : x \mapsto f(x) - \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c)$, montrer qu'il existe η tel que

$$f(c) = \frac{1}{2}(c-a)(c-b)f"(\eta)$$

Exercice 8 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, deux fois dérivable sur $]a, b[$ et $c \in]a, b[$.
En utilisant la fonction

$$\phi : x \mapsto f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - \lambda(x-a)(x-b)$$

avec λ à déterminer, montrer qu'il existe η tel que

$$f(c) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a) + \frac{1}{2}(c-a)(c-b)f''(\eta)$$