Lycée Saint-Louis TD 17
MPSI

Utilisations des formules de Taylor

Exercice 1 : Déterminer un équivalent de

1. $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[5]{\cos x}$ en 0
2. $\dfrac{\ln(1+\cos x) - \ln 2}{\sqrt{1+x} - \cos x}$ en 0
3. $(1+\sin x)^3 - \mathrm{ch}(x)$ en 0
4. $\dfrac{3x^2 - 2x - 1}{\ln(x)}$ en 1
5. $\dfrac{\ln(1+x) - \ln 2}{\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{2}}$ en 1

Exercice 2 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} x^k$.

Exercice 3 : Méthodes des rectangles
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

1. Montrer que $\left|\int_a^b f - (b-a)f(a)\right| \leq \dfrac{(b-a)^2}{2} \underset{x\in[a,b]}{\mathrm{Max}} |f'(x)|$
2. En déduire que pour tout n, on a

$$\left|\int_a^b f - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \underset{x\in[a,b]}{\mathrm{Max}} |f'(x)|$$

   puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f$
3. Prouver de même que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a + (k+1)\dfrac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f$

On dit que les méthodes des rectangles à droite ou à gauche est d'ordre un.

Exercice 4 : Méthode du point milieu
Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{C})$.

1. Montrer que :

$$\int_a^b f - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_a^b \left(f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \mathrm{d}x.$$

   puis que

$$\left|\int_a^b f - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^3} \underset{[a,b]}{\mathrm{Max}} |f''|$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que

$$\left|\int_a^b f - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k+\frac{1}{2}\right)(b-a)\right)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \underset{[a,b]}{\mathrm{Max}} |f''|$$

   puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k+\dfrac{1}{2}\right)(b-a)\right) = \int_a^b f.$
   On dit que la méthode du point milieu est d'ordre deux.

Exercice 5 : Méthode des trapèzes
Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\int_a^b f - (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2} = \int_a^b (f-g)$
   où $g : [a,b],\ x \mapsto f(a) + (x-a)(f(b)-f(a))$.
2. Soit $x \in]a,b[$.
   On considère la fonction $\phi : [a,b],\ t \mapsto f(t) - g(t) - K(t-a)(t-b)$ avec $K = \dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)(x-b)}$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\phi''(c) = 0$ puis que

$$\left|\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)(x-b)}\right| \leq \underset{[a,b]}{\mathrm{Max}} |f''|$$

   et enfin que $\forall x \in [a,b], \quad |f(x)-g(x)| \leq \dfrac{(b-a)^3}{6} \underset{[a,b]}{\mathrm{Max}} |f''|$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire

$$\left|\int_a^b f - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right)}{2}\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \underset{x\in[a,b]}{\mathrm{Max}} |f''(x)|$$

   On dit que la méthode des trapèzes est d'ordre deux.