Structures

Exercice 1 :
Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$ associative tel que
- il existe un élément neutre à droite e i.e. $\exists e \in G\ :\ \forall g \in G,\ g * e = g$
- tout élément de G admet un inverse à droite par rapport à e i.e $\forall g \in G,\ \exists g' \in G\ :\ g * g' = e$

Montrer que G est un groupe.

Exercice 2 :
1. Soit G un groupe tel que
$$\forall (x,y) \in G^2,\ (x * y)^2 = x^2 * y^2$$
Montrer que G est abélien.
2. Que dire d'un groupe tel que $\forall x \in G,\ x^2 = e$?

Exercice 3 : Soit H et K deux sous-groupe d'un groupe G.
Montrer que $H \cup K$ est un groupe si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 4 : Soit $(G, \cdot)$ un groupe.
1. Pour tout $g \in G$, on pose ϕ_g qui va de G dans lui même et qui à un élément $x \in G$ fait correspondre l'élément gxg^{-1}. Montrer que ϕ_g est un automorphisme de G.
On dit que ϕ_g est un automorphisme intérieur.
2. Prouver que l'ensemble $Int(G) = \{\phi_g, g \in G\}$ des automorphismes intérieurs est un sous-groupe de $(Aut(G), \circ)$ et que l'application $g \mapsto \phi_g$ de G dans $Int(G)$ est un morphisme de groupes.

Exercice 5 : Soit G un groupe possédant deux sous-groupes H_1 et H_2 tels que
$$G = H_1H_2 = \{h_1 * h_2,\ (h_1, h_2) \in H_1 \times H_2\}$$
1. Montrer que tout élément de G s'écrit de façon unique comme le produit d'un élément de H_1 et d'un élément de H_2 si et seulement si $H_1 \cap H_2 = \{e\}$.
2. On suppose que cette condition est remplie et que tout élément de H_1 commute avec tout élément de H_2. Montrer que G est isomorphe à $H_1 \times H_2$.
3. Réciproquement, montrer que si un groupe G est isomorphe à un produit de deux groupes $G_1 \times G_2$ alors il existe H_1 et H_2 deux sous-groupes de G tels que $G = H_1H_2$, $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ et tout élément de H_1 commute avec tout élément de H_2.

Exercice 6 :
Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $*$ associative tel que
$$\forall (a,b) \in G^2,\ \exists (x,y) \in G^2\ :\ a * x = b \text{ et } y * a = b$$
Montrer que G est un groupe.

Exercice 7 : Soit A un anneau et B une partie de A. Montrer que B est un sous-anneau de A si et seulement si
$$-1_A \in B \quad \text{et} \quad \forall (a,b) \in B,\ a + b \in B \ \text{ et } \ ab \in B$$

Exercice 8 :
1. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un corps.
2. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}, (a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4\}$ est un corps.

Exercice 9 : Soit A un anneau. On dit qu'un élément x de A est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x^p = 0$.
Dans ce cas, le plus petit entier p tel que $x^p = 0$ est appelé indice de nilpotence de x
1. Montrer que la somme de deux éléments nilpotents qui commutent est nilpotent.
2. Montrer que si $1 - x$ est nilpotent, alors x est inversible et $1 - x^{-1}$ est nilpotent.
On suppose maintenant que $\mathbb{Q} \subset A$ et on définit l'exponentielle d'un élément x nilpotent d'indice p par
$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x^k}{k!}$$
3. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors on a :
$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$$