

Arithmétique

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $n + 1$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
2. En déduire que $n + 1$ divise $\binom{2n}{n}$.

Exercice 2 : Déterminez les couples $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a \wedge b = 2$ et $a \vee b = 80$

Exercice 3 :

1. Soit $n \geq 2$ et k un entier naturel tel que $2 \leq k \leq n$. Montrer que $n! + k$ n'est pas premier.
2. En déduire que pour tout entier n , il existe n entiers consécutifs dont aucun n'est premier.

Exercice 4 :

1. Soient a et b deux entiers relatifs. Montrer que $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a + b) \wedge (ab) = 1$.
2. En déduire $(a + b) \wedge (a \vee b)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer $n \wedge (n + 1)$ et $n \wedge (n + 2)$. En déduire $(n \vee (n + 1)) \vee (n + 2)$.
4. Déterminer les entiers n tels que $(2n + 1) \wedge (n^3 + n) = 1$.

Exercice 5 :

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Exercice 6 :

1. Montrer que si $2^n - 1$ est premier alors n aussi. Réciproque? Ces entiers sont appelés nombre de Mersenne.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que si $2^n + 1$ est premier alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2^q$.
3. Trouver q tel que $2^{2^q} + 1$ ne soit pas premier.
4. Soit $n > 2$. Montrer que $2^n - 1$ et $2^n + 1$ ne sont pas simultanément premiers mais sont premiers entre eux.

Exercice 7 : Soit $(a, b, n, m) \in \mathbb{N}^4$ et $\mathcal{S} = \{k \in \mathbb{Z} : k \equiv a[n] \text{ et } k \equiv b[m]\}$.

1. Montrer que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ si, et seulement si, $(n \wedge m) \mid (b - a)$.
2. On suppose que $c \in \mathcal{S}$. Prouver que $\mathcal{S} = \{c + q(n \vee m), q \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 8 : Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

1. Montrer que $\vee$ est distributif par rapport à $\wedge$.
2. Montrer que $\wedge$ est distributif par rapport à $\vee$.
3. Montrer que $(ab) \wedge c = (a \wedge c) \times d$ et que $(ab) \vee c = (a \vee c) \times \frac{|b|}{d}$ où $d = \frac{c}{a \wedge c} \wedge b$.