Calculs

Exercice 1 :

1. Simplifier $(1-a)\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1}$. En déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^{n} ka^k$.
2. Trouver a, b, c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$

   En déduire $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.
Montrer que

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = k) \Longleftrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2\right)$$

Exercice 3 : : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier

1. $\sum_{k\in[\![1,2n]\!],\, impair} 3^k$
2. $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$
3. $\prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{2k}\right)$
4. $\prod_{k=1}^{n} (3^k)$
5. $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ pour $x \in]0,\pi[$ en utilisant la formule de trigonométrie : $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
6. $\sum_{k=1}^{n} k\, k!$

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\sqrt{2\sqrt{3...\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}} < 3$.
On pourra commencer par prouver que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \qquad \sqrt{k\sqrt{(k+1)...\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}} < k+1$$

Exercice 5 : : Simplifier les sommes suivantes

1. $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} (i-j)$
2. $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |i-j|$
3. $\sum_{1\le i<j\le n} (i-j)$
4. $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} ij$
5. $\sum_{1\le i<j\le n} ij$
6. $\sum_{1\le i<j\le n} \frac{i}{j}$
7. $\prod_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} ij$
8. $\prod_{1\le i<j\le n} ij$

Exercice 6 : : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Prouver que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et en déduire $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.
2. Pour $k \in [\![2,n]\!]$, simplifier $k(k-1)\binom{n}{k}$ et en déduire $\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 : Soit $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer $\underset{k\in[\![0,2n]\!]}{\text{Max}} \binom{2n}{k}$ et $\underset{k\in[\![0,2n+1]\!]}{\text{Max}} \binom{2n+1}{k}$.

Exercice 8 : Formule de Vandermonde
Soit $(n_1, n_2, n) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $\binom{n_1+n_2}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}$.
Donner une interprétation de cette formule.