Lycée Saint-Louis — TD 21
MPSI

Applications linéaires

Exercice 1 :

1. Déterminer l'unique application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que $f(1,0,0) = (0,1)$, $f(1,1,0) = (1,0)$ et $f(1,1,1) = (1,1)$. Déterminer l'image et le noyau de f.
2. Déterminer l'unique application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que $f(1,2) = (1,1,0)$ et $f(2,1) = (0,0,1)$. Déterminer l'image et le noyau de f.

Exercice 2 : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y-z=0\}$, $G = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$ et $H = \mathrm{Vect}\{(1,0,0)\}$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et déterminer la projection sur F parallèlement à G.
2. Montrer que F et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et déterminer la projection sur F parallèlement à H.

Exercice 3 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

1. Comparer $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Ker} f^2$.
2. Comparer $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im} f^2$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker} f = \ker f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$.
4. Montrer que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f = E$.

Exercice 4 :

1. Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont stables par g.
2. Soit p un projecteur.
   Montrer que f et p commutent si et seulement si $\mathrm{Ker} p$ et $\mathrm{Im} p$ sont stables par f.

Exercice 5 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ soit liée.
Montrer que f est une homothétie.

Exercice 6 : Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f \circ g = Id$.

1. Prouver que $g \circ f$ est une projection.
2. Montrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im} g = \mathrm{Im}(g \circ f)$
3. Prouver que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} g$ sont supplémentaires.
4. Prouver que $\mathrm{Ker} g$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires.
5. La relation $f \circ g = Id$ implique-t-elle que $g = f^{-1}$.

Exercice 7 : : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$

1. Comparer $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Ker}(g \circ f)$.
2. Comparer $\mathrm{Im} g$ et $\mathrm{Im}(g \circ f)$.
3. On suppose que $E = F = G$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker}(g \circ f)$ si et seulement si $\mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$
   (b) Montrer que $\mathrm{Im} g = \mathrm{Im}(g \circ f)$ si et seulement si $E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} g$.

Exercice 8 : Soit p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $Id - p$ est un projecteur.
2. Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0$.
   Dans ce cas, prouver que $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker} p \cap \mathrm{Ker} q$ et $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im} p + \mathrm{Im} q$.
3. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$ tel que $p \circ q = \lambda\, q \circ p$.
   Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 9 : : Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$, $h \in \mathcal{L}(F,G)$ et $\phi \in \mathcal{L}(H,E)$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f \circ \phi) \subset \mathrm{Ker}(g \circ \phi)$ si et seulement si $\mathrm{Im}\phi \cap \mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Im}\phi \cap \mathrm{Ker} g$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(h \circ f) \subset \mathrm{Im}(h \circ g)$ si et seulement si $\mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} h \subset \mathrm{Im} g + \mathrm{Ker} h$.