

Applications linéaires

Exercice 1 : On considère $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ -ev.

1. Prouver que tout endomorphisme de $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto az + b\bar{z}$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$
2. Déterminer les automorphismes de $\mathbb{C}$.

Exercice 2 : Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker}g \cap \text{Im}f$.

Exercice 3 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, E' un sev de E et F' un sev de F .

1. Exprimer $f(f^{-1}(F'))$ en fonction de F' et $\text{Im}f$.
2. Exprimer $f^{-1}(f(E'))$ en fonction de E' et $\text{Ker}f$.

Exercice 4 :

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 4f + 3\text{Id}_E = 0$.
 - (a) Prouver que f est un automorphisme.
 - (b) Prouver que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 3\text{Id}_E)$.
 - (c) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f et g commutent si, et seulement si, g laisse stables $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f - 3\text{Id}_E)$.
2. Soient F et G tels que $E = F \oplus G$. Prouver qu'il existe un unique endomorphisme g de E tel que $F = \text{Ker}(g - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(g - 3\text{Id}_E)$.
Vérifier que $g^2 - 4g + 3\text{Id}_E = 0$.

Exercice 5 : Soit p un projecteur de E et $q = \text{Id}_E - p$.

Soit $F = \{f \circ p, f \in \mathcal{L}(E)\}$ et $G = \{f \circ q, f \in \mathcal{L}(E)\}$

Prouver que $\mathcal{L}(E) = F \oplus G$.

Exercice 6 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$

1. Prouver que la famille $(f^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est libre.
2. Prouver qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit libre.

Exercice 7 : Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) : f \circ g = g \circ f\}$ est un $\mathbb{K}$ -ev.
2. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}$ et pour tout $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{K}^r$, on a :

$$a_0 \text{Id}_E + a_1 f + \dots + a_r f^r = \sum_{k=0}^r a_k f^k \in \mathcal{C}(f).$$

3. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .

$$\text{Prouver que } \mathcal{C}(f) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k, (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Exercice 8 :

Soient F et G deux sev de E supplémentaires tels que $(f_1, \dots, f_n)$ soit une base de F .

1. Soit $g \in G$. Montrer que $F_g = \text{Vect}(f_1 + g, \dots, f_n + g)$ est un supplémentaire de G dans E .
2. Montrer que si $g \neq g'$, alors $F_g \neq F_{g'}$.

Exercice 9 :

Soient $(f_1, \dots, f_n)$ une famille libre de E , $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et $g = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k$.

Déterminer une CNS sur $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ pour que la famille $(f_1 + g, \dots, f_n + g)$ soit libre.