

Polynômes

Exercice 1 : Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que le reste dans la division Euclidienne de P par $X - a$ est $P(a)$.
2. Déterminer le reste dans la division Euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ lorsque $a \neq b$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer le reste de la division Euclidienne de $(\cos \theta + X \sin \theta)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 2 :

Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(0) = 1$ et $P(1) = 2$.

Exercice 3 : Relation de Bézout améliorée

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ non nuls tel que $A \wedge B = 1$ et $(U_0, V_0) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que

$$AU_0 + BV_0 = 1$$

1. Montrer que

$$\{(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2 : AU + BV = 1\} = \{(U_0 + RB, V_0 - RA), R \in \mathbb{K}[X]\}$$

2. En déduire qu'il existe un unique couple $(U_1, V_1) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$AU_1 + BV_1 = 1, \deg U_1 < \deg B \text{ et } \deg V_1 < \deg A.$$

Exercice 4 :

1. Déterminez le PGCD, P , des polynômes $X^{10} - 1$ et $X^6 - 1$
2. Déterminer $\{(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2 : (X^{10} - 1)U + (X^6 - 1)V = P\}$
3. Soient n et p deux entiers naturels non nuls
 - (a) Déterminer le reste et le quotient de la division Euclidienne de $X^n - 1$ par $X^p - 1$.
 - (b) Déterminer le PGCD de $X^n - 1$ et $X^p - 1$ en fonction de $p \wedge n$.

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(P_0, \dots, P_n) \in \mathbb{K}[X]^{n+1}$ tel que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(P_k) = k$.
Montrer que (P_0, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que la famille $(X^k(X - 1)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 7 : On cherche à déterminer les polynômes P non nuls de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P(X^2) + P(X)P(X + 1) = 0.$$

1. Soit P un polynôme solution
 - (a) Montrer que si a est racine de P alors a^2 aussi.
 - (b) En déduire que a est racine de P , alors $a \in \{0\} \cup \mathbb{U}$.
 - (c) Montrer que si a est racine de P , alors $a - 1 \in \{0\} \cup \mathbb{U}$.
 - (d) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{N}^4$ tels que :

$$P = \lambda X^\alpha (X - 1)^\beta (X + j)^\gamma (X + j^2)^\delta$$

2. Conclure.

Exercice 8 :

1. Montrer que pour tout entier n , il existe un unique polynôme P_n tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad P_n \left(z + \frac{1}{z} \right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .

2. Pour tout entier n , simplifier $P_n(2 \cos \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.
3. En déduire les racines de P_n puis la factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.