Polynômes

Exercice 1 : Soit $a \in \mathbb{K}^2$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.
Déterminer le reste dans la division Euclidienne de P par $(X-a)^2$

Exercice 2 :
Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que :
$P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P'(0) = -1$ et $P'(1) = 0$.

Exercice 3 :
Déterminer la décomposition de $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 :

1. Montrer que pour tout entier n non nul, il existe un unique couple de polynômes (P_n, Q_n) de degré strictement inférieur à n tel que
$$(1-X)^n P_n(X) + X^n Q_n(X) = 1.$$
2. Exprimer Q_n en fonction de P_n et en déduire l'existence de $c_n \in \mathbb{R}$ telle que
$$(1-X)P_n'(X) - nP_n(X) = c_n X^{n-1}$$
3. En déduire les coefficient de P_n.

Exercice 5 :

1. A l'aide du polynôme $(X+1)^n$ déterminer les sommes :
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$$
2. Déterminer les sommes :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k3^k$$

Exercice 6 :
Montrer que pour tout entier n, il existe un unique polynôme à coefficients réels P_n tel que $P_n - P_n' = X^n$.
Déterminer ses coefficients.

Exercice 7 :
Trouver tous les polynômes P à coefficients complexes tels que P' divise P.

Exercice 8 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Prouver que $P(X+1) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}P^{(n)}(X)$.

Exercice 9 :
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que le polynôme $(X+1)^n - e^{i\theta}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
En déduire que
$$\forall \phi \in \mathbb{R}, \quad \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\phi + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(n\phi)}{2^{n-1}}.$$

Exercice 10 :
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples. Montrer que P ne peut pas avoir deux coefficients consécutifs nuls.