

Développements limités

Exercice 1 : Déterminer les développements limités suivants :

1. A l'ordre 2 en a de $f : x \mapsto e^x$.
2. A l'ordre 2 en $a > 0$ de $f : x \mapsto x\sqrt{x}$.
3. A l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x+x^2}\right)$.
4. A l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \frac{1}{(x+3)(1-x)}$.
5. A l'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto \frac{x^2+x-\sin x}{\ln(1+x)}$.
6. A l'ordre 2 en 1 de $f : x \mapsto \frac{x \ln x}{x^2-1}$.
7. A l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$.
8. A l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)$.
9. A l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto (\ln(1+x))^2$.

Exercice 2 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(\tan x - x)}{\ln(1+x)}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$, où a et b sont des réels strictement positifs.
3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan(2x)}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \operatorname{ch}x - 2}{x^4}$
6. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{ch}x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 3 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 \in]0, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{1+n}$.

1. Montrer que (u_n) converge vers 1.
2. Déterminer deux réels a et b tels que : $u_n = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.