Séries

Exercice 1 : Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \left(\dfrac{n^2}{1+n^2}\right)^{1/n}$
2. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$
3. $\sum \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^3-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$
4. $\sum \left(e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$
5. $\sum \left(\dfrac{e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\ln(n) - \lfloor \ln(n) \rfloor + n}\right)$
6. $\sum \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$
7. $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$
8. $\sum \arccos \dfrac{n^3+1}{n^3+2}$
9. $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$
10. $\sum \ln\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}}\right)$

Exercice 2 : Critère de comparaison logarithmique et règle de Duhamel

1. Critère de comparaison logarithmique
   Soient u et v deux séries à termes strictement positifs telles que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
   Montrer que si $\sum v_n$ converge , alors $\sum u_n$ aussi.
2. Règle de Duhamel : Soit u une suite de réels strictement positifs telle que :
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
   Montrer que :
   — Si $\alpha > 1$, alors la série $\sum u_n$ converge
   — Si $\alpha < 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge
3. Quel est la nature des séries $\sum \dfrac{n^n}{n!e^n}$ et $\sum \left(\sqrt{(n-1)!}\prod_{k=1}^{n-1}\sin(1/\sqrt{k})\right)$?

Exercice 3 :
Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Exercice 4 : On considère les suites u et v définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

1. Trouver un équivalent de la suite v et en déduire que $\sum v_n$ converge.
2. En déduire qu'il existe une constante C telle que $n! \sim Cn^n e^{-n}\sqrt{n}$.

Exercice 5 : (*) Soit u une suite de réels strictement positifs, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des restes.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge. Quelle est la nature de $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$?
2. On suppose que $\sum u_n$ diverge.
   (a) Quelle est la nature de $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$?
   On pourra prouver que si $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ converge alors la suite $(\ln S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (b) Quelle est la nature de $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ pour $\alpha < 1$?
   (c) Quelle est la nature de $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ pour $\alpha > 1$?
   On pourra remarquer que $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha} = \dfrac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha}$
3. Quelle est la nature de $\sum \dfrac{u_n}{R_{n-1}^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$?