Dimension finie

Dans la suite, E désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n.

Exercice 1 :
Montrer que les vecteurs $(1,1,1)$, $(1,2,3)$ et $(1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 : Soient $F = \text{Vect}\ \{(1,2,0,1);(2,1,3,1);(1,-1,3,0)\}$ et
$G = \text{Vect}\ \{(1,2,1,0);(-1,1,1,1);(2,-1,0,1);(1,1,1,1)\}$.
Déterminer les dimensions et des bases de F, G, $F\cap G$ et $F+G$.

Exercice 3 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\text{Ker}f \oplus \text{Im}f = E \Leftrightarrow \text{Ker}f = \text{Ker}f^2 \Leftrightarrow \text{Im}f = \text{Im}f^2$$

Le résultat est-il conservé en dimension infinie.
On pourra étudier $P \mapsto P'$ et $P \mapsto XP$.

Exercice 4 :
Soit $E_1, \cdots E_n$ des $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies et $u_0 \in \mathcal{L}(\{0\}, E_1)$, $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$,..., $u_{n-1} \in \mathcal{L}(E_{n-1}, E_n)$, $u_{n+1} \in \mathcal{L}(E_n, \{0\})$ tels que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on ait

$$\text{Im}u_k = \text{Ker}u_{k+1}.$$

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \dim E_k = 0$.

Exercice 5 :
Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie tel que $E = \text{Im}f + \text{Im}g = \text{Ker}f + \text{Ker}g$.
Montrer que $E = \text{Im}f \oplus \text{Im}g = \text{Ker}f \oplus \text{Ker}g$.

Exercice 6 : Soit F et G deux sev de E.
Montrer que $(\exists f \in \mathcal{L}(E) : \text{Ker}f = F \text{ et } \text{Im}f = G) \Leftrightarrow \dim\ F + \dim\ G = \dim\ E$

Exercice 7 : : Soit $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\dim\ F < \infty$.
Montrer que $\text{rg}\ (f+g) \leq \text{rg}\ f + \text{rg}\ g$ avec égalité si, et seulement si,

$$\begin{cases} \text{Im}f \cap \text{Im}g &= \{0\} \\ \ker f + \ker g &= E \end{cases}$$

Exercice 8 : : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\dim\ F < \infty$, A un sev de E et B un sev de F.

1. Montrer que $\dim\ f(A) = \dim\ A - \dim\ (A \cap \text{Ker}f)$
2. Montrer que $\dim\ f^{-1}(B) = \dim\ \text{Ker}f + \dim\ (B \cap \text{Im}f)$

Exercice 9 : Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer que

$$\dim\ \text{Ker}g \circ f \leq \dim\ \text{Ker}g + \dim\ \text{Ker}f$$

1. en considérant la restriction de g à $\text{Im}f$;
2. en considérant la restriction de f à $\text{Ker}g \circ f$.

Exercice 10 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout entier p, on pose $I_p = \text{Im}f^p$ et $N_p = \ker f^p$.

1. Montrer que, pour tout entier p, $I_{p+1} \subset I_p$ et $N_p \subset N_{p+1}$.
2. Montrer qu'il existe un entier s tel que $I_{s+1} = I_s$ et $N_s = N_{s+1}$.
3. Soit $r = \min\{k \in \mathbb{N} : I_{k+1} = I_k \text{ et } N_k = N_{k+1}\}$.
   Justifier l'existence de r puis prouver que $\forall k \geq r, \quad I_{k+1} = I_k$ et $N_k = N_{k+1}$
4. Montrer que $I_r \oplus N_r = E$.

Exercice 11 :

1. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E. Montrer qu'ils possèdent un supplémentaire commun.
2. Soient F_1 et F_2 deux sev de E de même dimension. Montrer qu'ils possèdent un supplémentaire commun.

Exercice 12 : Soit $x_1, \cdots, x_n$ n réels distincts.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $\phi_k : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto P(x_k)$

1. Montrer que $(\phi_1, \cdots \phi_n)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe un unique $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_0^1 P(t)\,\text{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(a_k).$$