Matrices

Exercice 1 :

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $ME_{i,j}$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $E_{i,j}M$.
3. Déterminer les matrices commutant avec toutes les autres matrices.

Exercice 2 : Inverser les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

1. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont des 1.
   Calculer les puissances de J
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de A.
   La matrice A est-elle inversible ?
3. Déterminer les puissances et l'inverse de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 :
Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ P \mapsto 2(X+1)P - (X-1)^2P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
3. L'endomorphisme f est-il un automorphisme ?

Exercice 5 : Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de $A - \lambda I_3$ et $\ker(A - \lambda I_3)$ en fonction du réel λ.
2. Montrer que $\mathcal{B} = ((1,0,1), (-1,1,0), (1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice D de f dans cette base.
4. Quelle relation relie les matrices A et D.
   En déduire l'expression de A^n pour tout entier n.

Exercice 6 : Soient u, v et w les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 2v_n - w_n \\ v_{n+1} &= -4u_n + 10v_n - 4w_n \\ w_{n+1} &= -8u_n + 16v_n - 6w_n \end{cases}$$

1. Trouver une matrice A telle que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$
2. Trouver un polynôme P unitaire de degré 2 tel que $P(A) = 0$.
3. En déduire que A est inversible.
4. Pour tout entier n déterminer le reste de la division Euclidienne de X^n par P.
5. En déduire A^n puis l'expression des suites u, v et w en fonction de u_0, v_0 et w_0.

Exercice 7 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension n.

1. On suppose que $f^p = 0$. Soit x tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$.
   Montrer que la famille $(x, f(x), ..., f^{p-1}(x))$ est libre.
2. En déduire que f est nilpotent d'ordre n (i.e. $f^n = 0$. et que $f^{n-1} \neq 0$) si, et seulement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit $(\delta_{i+1,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
3. Trouver une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de $P \mapsto P'$ soit égale à $A = (\delta_{i+1,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
4. Déterminer les matrices commutant avec la matrice A.

Exercice 8 : Soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K},\ M \mapsto \sum_{k=1}^{n} M_{k,k}$.

1. Montrer que $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{K})^2,\ \phi(AB) = \phi(BA)$.
2. Déterminer les formes linaires ψ sur $M_n(\mathbb{K})$ telles que
   $$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{K})^2,\ \phi(AB) = \phi(BA).$$