# Matrices

**Exercice 1 :** Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang 1

1. Montrer qu'il existe $L \in M_{1,p}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = CL$.
   On suppose désormais que $n = p$
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$.
3. Prouver que $\lambda = \mathrm{Tr} A$.

**Exercice 2 :**

1. Soit $\phi$ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.
   Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que
   $$\forall M \in M_n(\mathbb{K}),\ \phi(M) = \mathrm{Tr}(AM).$$
2. Montrer qu'il existe une matrice inversible $M$ telle que $\mathrm{Tr}(J_r M) = 0$.
3. En déduire que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

**Exercice 3 :** Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que $f^3 + f = 0$ non nul et non bijectif.
On veut montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de $f$ soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Prouver que si la base $(e_1, e_2, e_3)$ convient, alors :
   $$e_1 \in \mathrm{Ker} f, \quad (e_2, e_3) \in \mathrm{Ker}(f^2 + Id)^2 \quad \text{et} \quad e_3 = -f(e_2).$$
2. Prouver que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + Id)$ sont en somme directe et non réduits à $\{0\}$.
3. Prouver que si $e_2$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f^2 + Id)$, alors $(e_2, f(e_2))$ est libre.
4. Conclure.

**Exercice 4 :**
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > \displaystyle\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

Montrer que $A$ est inversible.

**Exercice 5 :**

1. En utilisant un endomorphisme associé, inverser la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où :
   $$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ j - i + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
2. En considérant les polynômes $P_k = (X+1)^k$, inverser la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où :
   $$b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \dbinom{j-1}{i-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exercice 6 :**

1. Prouver que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.
2. Prouver que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.
3. Prouver que les matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

**Exercice 7 :** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de rang $r$.
Prouver que $\{B \in M_n(\mathbb{K}) \,:\, ABA = 0\}$ est un $\mathbb{K}$-ev et déterminer sa dimension.

**Exercice 8 :** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.
Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que
$$\begin{cases} f^2 = g^2 = Id_E \\ f \circ g + g \circ f = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $E$ est de dimension paire. On pose $n = 2p$.
2. Montrer l'existence d'une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ soit la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\underbrace{1, \cdots, 1}_{p \text{ fois}}, \underbrace{-1, \cdots, -1}_{p \text{ fois}})$ et celle de $g$ soit $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_{i,p+i} + \sum_{i=p+1}^{2p} E_{i-p,i}$.

**Exercice 9 :** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ non nul et non bijectif tel que $f + f^3 = 0$

1. Montrer que $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$.
2. Prouver qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ tel que $Mat_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercice 10 :**

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ telle qu'il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$ et $\varphi(E_{i,j}) \neq 0$. Prouver l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi(I_n + \lambda E_{i,j}) = 0$.
2. En déduire que, pour $n \geqslant 2$, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

**Exercice 11 :** Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices de $S_n(\mathbb{K})$.

**Exercice 12 :** Soient $D \in M_n(\mathbb{K})$ diagonale ayant des coefficients diagonaux distincts. Déterminer le noyau et l'image de $\phi : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$, $M \mapsto DM - MD$.

**Exercice 13 :**

1. Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices de $GL_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que
$$\forall (M,N) \in M_n(\mathbb{K})^2,\ A = MN \Rightarrow A = NM$$
Montre qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ $A = \lambda I_n$.

**Exercice 14 :** Soit $E$ de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $f$ l'endomorphisme de $E$ tel que $Mat_{\mathcal{B}} f = A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2 + e_3, e_1 - e_2, e_1 + e_3)$ est une base de $E$
2. Déterminer $D = Mat_{\mathcal{B}'} f$
3. Quelle relation relie les matrices $A$ et $D$.
4. En déduire l'expression de $A^n$ pour tout entier $n$.

**Exercice 15 :**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M$ sa matrice par rapport à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
Quelle est la matrice de $u$ par rapport à $\mathcal{B}_1 = (-e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ?
Quelle est la matrice de $u$ par rapport à $\mathcal{B}_2 = (e_2, e_1, e_3, e_4, \ldots, e_n)$ ?
2. Quels sont les endomorphismes de l'espace vectoriel $E$ dont les matrices sont indépendantes de la base choisie ?
3. Quelles sont les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $GL_n(\mathbb{K})$ ?

**Exercice 16 :** Dans $\mathbb{R}^3$ on considère $s$ la symétrie

— par rapport au plan d'équation : $x + 2\,y + 3\,z = 0$,
— parallèlement à la droite engendrée par $(1, 1, 1)$.

1. En donner la matrice $M$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les puissances de $M$.

**Exercice 17 :** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(C)$.

1. Montrer que $F = \{M \in M_n(C) : AM = MA\}$ est un espace vectoriel.
2. On suppose que $A$ est diagonale et que ses coefficients sont distincts. Montrer que $(A^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $F$.