

Complexes

Exercice 1 : Résoudre

$$\begin{array}{l|l} 1. z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i & 4. |z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |1 - z| \\ 2. (1 - i)z - 3i\bar{z} = 1 + 4i & \\ 3. |z| = z + \bar{z} & 5. |(1 + i)z - 2i| = 2 \end{array}$$

Exercice 2 : Déterminer le module et l'argument de

$$\begin{array}{l|l} 1. 1 + i. & 5. 1 + \cos \theta + i \sin \theta \\ 2. 1 - i\sqrt{3} & \\ 3. \frac{1 + i}{1 - i} & 6. \frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 - \cos \theta - i \sin \theta} \\ 4. \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} & 7. (1 + i)^{20} \end{array}$$

Exercice 3 : Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Montrer que $|a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|$.
2. Caractérisez les cas d'égalité.

Exercice 4 :

1. Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 2 \cos \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}$
2. En déduire que $\{z_1 + z_2, (z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$
3. Montrer que tout réel peut s'écrire comme la somme d'un nombre fini d'éléments de $\mathbb{U}$.

Exercice 5 :

1. Soient O et A les points d'abscisses respectives 0 et 1 ainsi que B et C deux points distincts du cercle trigonométrique
Montrer, à l'aide des nombres complexes, que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) [2\pi]$.
Quel résultat bien connu retrouve-t-on ?

2. Soient A, B et C trois points du plan non alignés.

Déterminer l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) [\pi]$

Exercice 6 :

1. En calculant $(1 + i)^{4n}$ de deux manières différentes, déterminer

$$T_1 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{4n} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \binom{4n}{k} \quad \text{et} \quad T_2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{4n} (-1)^{k/2} \binom{4n}{k}$$

2. En déduire

$$S_0 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0[4]}}^{4n} \binom{4n}{k}, \quad S_1 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 1[4]}}^{4n} \binom{4n}{k}, \quad S_2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 2[4]}}^{4n} \binom{4n}{k} \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 3[4]}}^{4n} \binom{4n}{k}$$

Exercice 7 : On considère le polynôme $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

1. Donner les racines complexes de P sous forme trigonométrique.
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Exprimer $\frac{P(z)}{z^2}$ en fonction de $u = z + \frac{1}{z}$ et en déduire les racines complexes de P sous forme algébrique.
3. En déduire les valeurs de $\cos \frac{2\pi}{5}$, $\sin \frac{2\pi}{5}$, $\cos \frac{4\pi}{5}$ et $\sin \frac{4\pi}{5}$.