Groupes Symétrique

Exercice 1 :
Soit $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 1 & 9 & 8 & 2 & 7 & 11 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.
Décomposer s en produit de cycles à supports disjoints, déterminer son ordre et sa signature.

Exercice 2 :
Soit $s \in \mathcal{S}_n$. Déterminer l'ordre de s en fonction de la longueur des cycles qui apparaissent dans sa décomposition en produits de cycles à supports disjoints.

Exercice 3 : Soient $n \geqslant 2$ et, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\tau_i = (i, i+1)$. Montrer que toute permutation $s \in \mathcal{S}_n$ s'écrit comme produit des τ_i.

Exercice 4 :
Montrer que tout élément $s \in \mathcal{S}_n$ peut s'écrire comme produit de $(1\ 2)$ et $(1\ 2\ \cdots\ n)$.

Exercice 5 : Soit $n \geqslant 2$.

1. Déterminer tous les morphismes de groupes $\varphi : S_n \to \mathbb{Z}$.
2. Déterminer tous les morphismes de groupes $\varphi : S_n \to \mathbb{C}^*$.