Déterminants

Exercice 1 : Calculer le déterminant des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & a+b & a^3+b^3 \\ 1 & b+c & b^3+c^3 \\ 1 & c+a & c^3+a^3 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos(2\alpha) \\ 1 & \cos\beta & \cos(2\beta) \\ 1 & \cos\gamma & \cos(2\gamma) \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$

6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix} \in M_n$

Exercice 2 : Calculer, à l'aide d'une récurrence d'ordre deux les déterminants :

1. $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$

Exercice 3 : : Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Déterminer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} b & c & \cdots & c \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}$$

1. Si $a = c$.
2. Si $a \neq c$ en montrant que $x \mapsto \begin{vmatrix} b+x & c+x & \cdots & c+x \\ a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ a+x & \cdots & a+x & b+x \end{vmatrix}$ est affine.
3. Relier les deux résultats obtenus.

Exercice 4 :
Calculer le déterminant des matrices de taille n suivantes en fonctions des paramètres :

1. $\begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots\ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ b_2 & b_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_n & \cdots & \cdots & b_n & a_n \end{pmatrix}$

Exercice 5 :
Expliciter, en fonction de a_0,...a_{n-1} le polynôme

$$P(X) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ -1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}$$