Déterminants

Exercice 1 : Calculer le déterminant des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}$ en fonction des sommes partielles de la série harmonique

Exercice 2 : Déterminer le déterminant des endomorphismes suivants :

1. $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X],\ P \mapsto P(X+1)$
2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto {}^tM$
3. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto AM$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fixée.

Exercice 3 : Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice diagonale

Exercice 4 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

1. Déterminer le rang de A en fonction de celui de sa comatrice
2. Prouver que $\det(ComA) = (\det A)^{n-1}$
3. Déterminer $Com\,(ComA)$
4. Déterminer les matrices A telles que $ComA = A$.

Exercice 5 : Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A+M) = \det A + \det M.$$

Exercice 6 : Montrer que

$$\forall M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}),\ \exists \varepsilon > 0\ :\ \forall t \in \mathbb{R},\quad |t| < \varepsilon \Rightarrow A + tI_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 7 : Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = Q^{-1}AQ$.