Produit scalaire

Exercice 1 : Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique

1. Déterminer l'orthogonal de $u = (0;1;1;1)$ et le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}u$.
2. Déterminer l'orthogonal de $P = \text{Vect}\left((0;1;1;1),(0;1;0;1)\right)$ et le projecteur orthogonal sur P.

Exercice 2 : Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
On considère le plan P d'équation $x + y + 3z = 0$.

1. Déterminer l'orthogonal de P et en donner une base.
2. Trouver une base orthonormée de P et de son orthogonal.
3. En déduire l'expression de la projection orthogonale sur P puis sa matrice dans la base canonique.
4. Pour tout élément x de E, déterminer sa distance au plan P.

Exercice 3 : Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $P = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}$ est une projection orthogonale

Exercice 4 : Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi : E^2 \to \mathbb{R},\ (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 (fg + f'g')$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f'' = f\}$.
   Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux et exprimer la projection orthogonale sur W.
3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $E_{a,b} = \{f \in E \mid f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$.
   Déterminer $\displaystyle\inf_{f \in E_{a,b}} \int_0^1 \left(f^2 + f'^2\right)$.

Exercice 5 : Soit E un espace préhilbertien réel, F et G deux sev de E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Prouver que si E est euclidien, alors $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 6 : Soit E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.
Montrer que p est une projection orthogonale ssi $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 7 : Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une bon de E et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

1. Prouver que p est orthogonal ssi $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$.
2. Prouver que p est orthogonal ssi $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
3. Prouver que p est orthogonal ssi il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in D_n(\mathbb{R})$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = {}^tPDP$.
   Que valent alors les coefficients diagonaux de D ?

Exercice 8 :
Soit $\phi\ \ \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ (P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} P(\cos t)Q(\cos t)\mathrm{d}t$.

1. Prouver que ϕ est un produit scalaire.
2. Prouver qu'il existe une unique famille orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \text{dom} P_n = 1 \text{ et } \deg P_n = n.$$
3. Déterminer P_0, P_1, P_2 puis la parité de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, prouver que $P_{n+2} - XP_{n+1} \in \mathbb{R}P_n$.
5. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \dfrac{1}{2^n}T_n$.

Exercice 9 : Calculer $\inf\left\{\displaystyle\int_0^1 \left(t^3 - at^2 - bt - c\right)\mathrm{d}t,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

Exercice 10 : Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Prouver qu'il existe une unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que
   $$\forall (x,y) \in E^2,\ (u(x), y) = (x, u^*(y)).$$
2. Soit $\mathcal{B}$ une bon de E. Trouver une relation entre $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*)$.
3. Soit F un sev de E. Prouver que F est stable par u si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par u^*.
4. Prouver que $\text{Ker}(u^*) = (\text{Im}u)^\perp$ et $\text{Im}(u^*) = (\text{Ker}u)^\perp$.
5. Prouver que $\text{Ker}(u^* \circ u) = \text{Ker}u$ et $\text{Im}(u \circ u^*) = \text{Im}u$.