Probabilités

Exercice 1 :

1. Combien de fois faut-il lancer un dé pour que la probabilité d'obtenir un 6 parmi ces lancers soit supérieure à $1/2$?
2. Combien de fois faut-il lancer deux dé pour que la probabilité d'obtenir un double 6 parmi ces lancers soit supérieure à $1/2$?

Exercice 2 :
On considère un jeu de dominos (chaque domino est découpé en deux parties pouvant comporter 0 à 6 points)

1. Quelle est la probabilité de piocher parmi les dominos deux dominos dont la somme des deux numéros est la même ?
2. Quelle est la probabilité de piocher parmi les dominos deux dominos ayant un numéro en commun ?

Exercice 3 :
On numérote les élèves d'une classe de n élèves aléatoirement (toutes les numérotations possibles sont donc équiprobables).

1. Quelle est la probabilité que Juliette et Roméo aient des numéros successifs ?
2. Quelle est la probabilité que Juliette et Roméo aient des numéros dont la différence fait k ?

Exercice 4 :
Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On tire une boule et l'on remet dans l'urne 2 boules de cette couleur. On réitère l'expérience n fois.

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
   Quelle est la probabilité que la première boule blanche soit tirée au k-ième lancer ?
2. Quelle est la probabilité que la n-ième boule soit blanche ?

Exercice 5 :
On considère E un ensemble de cardinal n et l'on munit $\mathcal{P}(E)^2$ de la probabilité uniforme. Déterminer les probabilités des évènements suivants :

1. $\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \ : \ A = \overline{B}\}$
2. $\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \ : \ A \subset B\}$
3. $\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \ : \ A \subset B, \ \#A = p \text{ et } \#B = q\}$
4. $\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \ : \ A \cap B = \emptyset\}$
5. $\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \ : \ A \cup B = E\}$

Exercice 6 :
On considère $E = [\![1, n]\!]$ et F un ensemble de cardinal F et l'on munit F^E de la probabilité uniforme.

1. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   (a) $\{f \in F^E \ : \ f \text{ injective}\}$
   (b) $\{f \in F^E \ : \ f \text{ bijective}\}$
   (c) $\{f \in F^E \ : \ f \text{ strictement croissante}\}$
   (d) $\{f \in F^E \ : \ f \text{ croissante}\}$
2. On note $u_{n,p} = \#\{f \in F^E \ : \ f \text{ surjective}\}$.
   (a) Montrer que $\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $u_{n,p} = p\,(u_{n-1,p-1} + u_{n-1,p})$.
   (b) Déterminer $u_{n,2}$, $u_{n,3}$ et $u_{n,n+1}$.
3. Soit $f \in F^E$. Déterminer le nombre d'application $g \in F^E$ telles que les familles $(f(k))_{1 \leq k \leq n}$ et $(g(k))_{1 \leq k \leq n}$ soient égaux à permutation près.
   (a) lorsque f injective,
   (b) dans le cas général en fonction des $(n_k = \#\{i \in]\!]1, n[\![, \ f(i) = k\})_{1 \leq k \leq p}$.