Lycée Saint-Louis — TD 36
MPSI

Variables aléatoires

Exercice 1 :
Une boite contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On tire l'un des $2n$ numéros, et on a le droit de retirer un autre numéro (après avoir remis le premier dans la boite) si on trouve que le premier numéro tiré est trop petit.
On considère la variable aléatoire X égale au numéro de la première boule tirée dans le premier cas et au numéro de la deuxième boule tirée dans le deuxième cas.
Stratégiquement, on se fixe une barre $b \in [\![1, 2n]\!]$ telle que, si le premier numéro tiré est inférieur ou égal à b, on refait un deuxième tirage, sinon on se contente du premier numéro.

1. Calculer en fonction de b la probabilité de l'évènement $(X = k)$, en distinguant les cas où $k \leq b$ et $k > b$.
2. Calculer l'espérance de X. Comment choisir b pour que cette espérance soit maximale ? Interprétez.

Exercice 2 : Lois multinomiales
Soit $(N_1, N_2, N_3) \in (\mathbb{N}^*)3$. On considère une urne contenant N_1 boules rouges, N_2 boules noires et N_3 boules blanches. On pose

$$N = N1 + N2 + N3,\ p_1 = \frac{N_1}{N},\ p_2 = \frac{N_2}{N} \text{ et } p_3 = \frac{N_3}{N}.$$

Soit n un entier. On effectue des tirages successifs avec remise de n boules dans cette urne. On note respectivement X, Y et Z le nombre de boules rouges, noires et blanches obtenues.

1. Définir la loi du triplé $(X; Y; Z)$.
2. Indiquer les lois suivies par les variables aléatoires X, Y, Z, $X+Y$, $X+Z$ et $Y+Z$.
3. En déduire les valeurs des espérances $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$, ainsi que la matrice des variances-covariances du triplé $(X; Y; Z)$.
4. Combien vaut la variance de $X + Y + Z$?

Exercice 3 : Lois polyhypergéométriques
Soit $(N_1; N_2; N_3) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^3$. On considère une urne contenant N_1 boules rouges, N_2 boules noires et N_3 boules blanches.
Soit n une entier non nul inférieur ou égal à $Min(N_1; N_2; N_3)$. On effectue un tirage simultané de n boules.
On note respectivement X, Y et Z le nombre de boules rouges, noires et blanches obtenues.

1. (a) Déterminer la loi du triplé $(X; Y; Z)$.
   (b) En déduire la loi du couple $(X; Y)$ et les lois conditionnelles de Y sachant $(X = i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.
   (c) Calculer les espérances et variances de X et Y , puis $Cov(X; Y)$ et $\rho_{X;Y}$.
2. (a) Quelle est la loi de Z et de $X + Y + Z$?
   (b) Comparer $E(X + Y + Z)$ et $E(X)$, $E(Y)$, $E(Z)$.
   (c) Calculer $V(X + Y + Z)$. Quel lien y a-t-il entre $V(X)$, $V(Y)$, $V(Z)$, $Cov(Y; Z)$, $Cov(Z; X)$ et $Cov(X; Y)$?
   (d) En déduire la matrice de variance-covariance du triplé $(X; Y; Z)$.

Exercice 4 : Loi hypergéométrique
Soit $(N_1; N_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules noires. Soit $n \leq N = N_1 + N_2$.
On tire simultanément n boules dans l'urne et on note X la variable aléatoire discrète égale au nombre de boules blanches obtenues.
On dit que X suit une loi hypergéométrique de paramètre N ; n ; $p = N1/N$.

1. (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Vérifier que $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$.
   (c) Montrer que l'espérance de X est donnée par
   $$E(X) = \sum_{Max(0, n-N_2) \leq k \leq Min(N_1, n)} k \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$
   En déduire sa valeur et interprétez.
   (d) Calculez $E(X(X-1))$ puis $V(X)$. Interprétez.
2. On numérote les boules blanches de 1 à N_1 et pour tout $i \in [\![1, N_1]\!]$, on note X_i la la variable aléatoire égale à 1 si la boule numéro i est tirée et 0 sinon de sorte que $X = X_1 + \cdots X_n$.
   (a) Pour tout $i \in [\![1, N_1]\!]$, déterminer la loi de X_i, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire $(X_1, \cdots X_n)$
   (c) Retrouver l'espérance et la variance de X.