Intégration

Exercice 1 :
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$,
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$,
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right)$,
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{(2n)!}{n^n\, n!}\right)^{1/n}$.

Exercice 2 :

1. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
2. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $x - x^3/6 \leq \sin x \leq x$.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(k/n)\sin(k/n^2)$.

Exercice 3 :
Déterminer un équivalent de :

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}$,
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}$,

Exercice 4 :
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\int_a^b |f| = \left|\int_a^b f\right|$$

Exercice 5 :
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose $g \geq 0$.
Prouver qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b fg = f(c)\int_a^b f$.

Exercice 6 :

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = 0$.
2. Montrer que le résultat est conservé lorsque f est une fonction en escalier.
3. Montrer que le résultat est conservé lorsque $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})$.

Exercice 7 :
Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)|\sin(nt)|\mathrm{d}t$.

Exercice 8 :
Soit $f \in \mathcal{C}\left([a,b],\mathbb{R}^+\right)$. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f^n(t)\mathrm{d}t\right)^{1/n} = \max\limits_{[a,b]} f$.