Convexité

Exercice 1 : Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $x\ln(x) \geq x-1$.

Exercice 2 : Répondre avec justifications aux questions suivantes :

1. Que dire d'une fonction convexe et concave ?
2. Que dire d'une fonction convexe possédant un point critique ?
3. Que dire d'une fonction convexe possédant un minimum local ?
4. Que dire des variations d'une fonction convexe possédant un minimum ?
   Que dire dans ce cas de l'ensemble des points où ce minimum est atteint ?
   Et si la fonction est strictement convexe ?
5. Que dire d'une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ majorée ?

Exercice 3 :
Soient f et g deux fonctions convexes sur un intervalle I.

1. Montrer que $\max(f,g)$ est convexe sur I.
2. Justifier que fg n'est pas forcément convexe
3. On suppose f et g sont croissantes et positives sur I.
   Montrer que fg est convexe sur I.
4. On suppose f strictement monotone. Que dire de f^{-1} ?

Exercice 4 : Montrer que la composée de deux fonctions convexes n'est pas forcément convexe mais qu'elle l'est avec une hypothèse de croissance.

Exercice 5 : Lien entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique
Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs.

1. Montrer que $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$.
2. En déduire que $n \leq \frac{x_1}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}$.

Exercice 6 : Soit p et q deux réels positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$. inégalité de Young
2. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ des nombres réels positifs.
   (a) Montrer l'inégalité de Hölder :
   $$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$
   (b) En déduire l'inégalité de Minkowski :
   $$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exercice 7 : Soit f continue sur un intervalle I.

1. On suppose que
   $$\forall (x,y) \in I^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$
   Montrer que f est convexe.
2. On suppose qu'il existe un réel M tel que
   $$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)| \leq My^2$$
   En considérant les fonctions $x \mapsto f(x) \pm Mx^2/2$, montrer que f est dérivable.