Fractions rationnelles

Exercice 1 : Décomposer en élément simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ les fractions suivantes :

1. $\frac{1}{X(X-2)}$ 2. $\frac{X}{(X^2-1)^2}$ 3. $\frac{1}{X^3+1}$ 4. $\frac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$ 5. $\frac{1}{X^3(X^2+X+1)}$	6. $\frac{(X^2-X+1)^2}{X^2(X-1)^2}$ 7. $\frac{1}{(X^2+1)^2}$ 8. $\frac{1}{X^{2n}+1}$ 9. $\frac{X^n}{X^{2n}-1}$ 10. $\frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)}$

Exercice 2 :

Montrer que la série $\sum \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 3 : Déterminer des primitives de $x \mapsto \frac{x^2}{x^4-1}$ et $x \mapsto \frac{x^4}{x^3-1}$.

Exercice 4 : Calculer la dérivée n -ème de $x \mapsto \frac{1}{x^2-2\cos(\theta)x+1}$ et de $x \mapsto \frac{1}{x^3+1}$.

Exercice 5 :

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n possédant n racines distinctes $a_1, \dots, a_n$.

Exprimer en fonction de P et de ses dérivées les sommes :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{X-a_k}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{(X-a_k)^2}, \quad \sum_{1 \leq k < i \leq n} \frac{1}{(X-a_k)(X-a_i)}$$

2. Simplifier les fractions

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{X-e^{2ik\pi/n}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{(X-e^{2ik\pi/n})^2}$$

Exercice 6 :

1. Déterminer la partie polaire de $F = \frac{1}{(X^n-1)^2}$ associée au pôle 1.
2. Vérifier que $F(e^{2ik\pi/n}X) = F(X)$ et en déduire la décomposition de F sur $\mathbb{C}$.