Lycée Saint-Louis | TD 4
MPSI

Complexes (suite)

Exercice 1 : Résoudre

1. $z^2 - (3+i)z + 2 + 6i = 0$
2. $z^4 - (5-14i)z^2 - 24 - 10i = 0$.

Exercice 2 : Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes

1. z, i et iz soient alignés
2. z, j et jz soient alignés
3. 1, z et $1+z^2$ soient alignés

Exercice 3 :
Interpréter géométriquement la transformation $z' = \dfrac{1+i}{1-i}z + i$.

Exercice 4 : Résoudre

1. $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^n = \dfrac{1+i}{1-i}$
2. $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^n + \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^n = 1$

Exercice 5 : Simplifier

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (x + e^{2ik\pi/n})^n$
2. $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(kx)}{(\cos x)^k}$

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier k, on pose $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

1. Factorisez le polynôme $X^n - 1$.
2. Simplifiez le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (z_k^2 - 2z_k \cos\theta + 1)$.

Exercice 7 : Soit n un entier non nul et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ème de l'unité

1. Pour tout entier k calculer $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^k$
2. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme à coefficients complexes.
   (a) Simplifiez $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} P(\omega)$.
   (b) Simplifiez $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega P(\omega)$.
   (c) Montrer que les coefficients de P sont majorés par
   $$M = \operatorname*{Max}_{\omega \in \mathbb{U}_n} |P(\omega)|$$
3. Retrouver
$$\sum_{k=0,\ k\equiv 0[3]}^{n} \binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0,\ k\equiv 1[3]}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0,\ k\equiv 2[3]}^{n} \binom{n}{k}$$

Exercice 8 :

1. Prouver que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - e^{2ik\pi/n}\right)$.
2. En admettant que le résultat est encore vrai pour $z = 1$, calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$