

Familles sommables

Exercice 1 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de réels positifs.

Prouver que la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable si, et seulement si, la suite

$$\left(\sum_{k=-n}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Exercice 2 : Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente.

Montrer que la série de terme général $v_n = n^3 \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{u_k}{k^2(k+1)^2}$ est convergente et déterminer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

Exercice 3 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Déterminer une CNS pour que la famille $\left(\frac{1}{(p^2 + q^2)^\alpha} \right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable

Exercice 4 : Soit u une suite positive décroissante.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge
 - (a) Montrer que la série $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge et déterminer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.
 - (b) En déduire que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. On suppose que $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge
 - (a) Peut-on en déduire que $\sum u_n$ converge ?
 - (b) Donner une CNS pour que $\sum u_n$ converge

Exercice 5 : Pour tout $x > 1$, on note $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Montrer que la série $\sum (\zeta(n) - 1)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $R > 0$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Montrer que pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, il existe $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $r > 0$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

Exercice 7 : Soit z un complexe tel que $|z| < 1$.

Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z^n}{1 - z^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} d(n) z^n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d(n)$ est son nombre de diviseurs positifs.

Exercice 8 : Soit $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la famille $\left(r^{|n|} e^{in\theta} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 9 : Montrer que la famille $\left(\frac{(-1)^p}{q^p} \right)_{(p,q) \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket}$ est sommable et déterminer sa somme.

Exercice 10 : Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$.

Déterminer la nature de $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$ et $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln(n)}$.

Exercice 11 : Déterminer la nature du produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ lorsque $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$