Ensembles et applications

Exercice 1 : Soit A, B et C trois ensembles. Prouver que

1. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$
2. $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$
3. $A \subset B \Leftrightarrow (A \cap C \subset B \cap C \text{ et } A \cup C \subset B \cup C)$
4. $A = B \Leftrightarrow (A \cup C = B \cup C \text{ et } A \cap C = B \cap C)$
5. $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$

Exercice 2 :
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un même ensemble E. On définit

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right) \quad \text{et} \quad \liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{k\geq n} A_k \right)$$

1. Montrer que $x \in \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n : x \in A_k$
2. Traduire de façon similaire l'appartenance à $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Trouver une relation entre $\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
3. Prouver que $\limsup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ et que $\liminf_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$

Exercice 3 :
Soient A et B deux parties d'un ensemble E tels que $A \subset B$.

1. Montrer que $\{X \in \mathcal{P}(E) : B \cap X = A\} = \{A \cup Y,\ Y \in E \setminus B\}$.
2. Trouver une caractérisation similaire des partie X de E telles que $A \cup X = B$.

Exercice 4 :
Soit E un ensemble. On suppose qu'il existe une surjection f de E dans $\mathcal{P}(E)$. En considérant l'ensemble $A = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}$, obtenir une contradiction.
Ainsi, il n'y a pas de surjection (donc pas de bijection) d'un ensemble dans l'ensemble de ses parties.

Exercice 5 : Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$. Montrer que

1. si $g \circ f$ est injective alors f aussi.
2. si $g \circ f$ est surjective alors g aussi.
3. si $g \circ f$ est injective et si f est surjective alors g est injective
4. si $g \circ f$ est surjective et si g est injective alors f est surjective
5. On suppose que $E = F = G$, que $h \in E^E$ et que $h \circ g \circ f$ et $f \circ g \circ h$ sont bijectives.
   Montrer que f, g et h sont bijectives.

Exercice 6 : Soient E et F deux ensembles non vides et $f \in F^E$.

1. Prouver que si f est injective, alors $\forall (g,h) \in \left(E^F\right)^2$, $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$
2. Prouver que si f est surjective, alors $\forall (g,h) \in \left(E^F\right)^2$, $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$

Exercice 7 : Soit $f \in F^E$.
Montrer que f est injective si et seulement si

$$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

Exercice 8 : Soit $f \in F^E$.

1. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si
   $$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f^{-1}(f(A)) = A$$
3. Soit $A \in \mathcal{P}(F)$. Montrer que $f\left(f^{-1}(A)\right) \subset A$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si
   $$\forall A \in \mathcal{P}(F), \quad f\left(f^{-1}(A)\right) = A$$
5. Soit $A \in \mathcal{P}(F)$. Prouver que $f\left(f^{-1}(A)\right) = f(E) \cap A$.

Exercice 9 : Soit A et B deux parties de E et

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X &\mapsto (A \cap X, B \cap X) \end{aligned}$$

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que Φ soit injective.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que Φ soit surjective.
3. Dans la cas où Φ est bijective, donner son inverse.