

Relations

Exercice 1 : Soit $f \in \mathbb{R}^E$ et $\mathcal{R}$ la relation sur E définie par :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

1. La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive?
Lorsque la réponse dépend de f donner un exemple où la propriété est vérifiée et un où elle ne l'est pas.
2. Donner une CNS sur f pour que $\mathcal{R}$ soit une relation d'ordre.
3. Dans ce cas, la relation d'ordre est-elle totale ou partielle?

Exercice 2 : Soit $f \in \mathbb{Z}^E$ et $\mathcal{R}$ la relation sur E définie par

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) \equiv f(y) [2]$$

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$.

Exercice 3 : Soit $f \in F^E$ et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur F et $\mathcal{R}'$ la relation sur E définie par

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow f(x)\mathcal{R}f(y)$$

1. La relation $\mathcal{R}'$ est-elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive?
Lorsque la réponse dépend de f donner un exemple où la propriété est vérifiée et un où elle ne l'est pas.
2. Donner une CNS sur f pour que $\mathcal{R}'$ soit une relation d'ordre.
3. Dans ce cas, la relation d'ordre est-elle totale ou partielle?

Exercice 4 : Soit $f \in F^E$ et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur F et $\mathcal{R}'$ la relation sur E définie par

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow f(x)\mathcal{R}f(y)$$

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in E$. Déterminer la classe de x .

Exercice 5 :

Déterminer (sans justifications formelles) :

1. le nombre de relations sur $\llbracket 1, n \rrbracket$
2. le nombre de relations réflexives sur $\llbracket 1, n \rrbracket$
3. le nombre de relations symétrique sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
4. le nombre de relations antisymétriques sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
5. le nombre de relations réflexives et symétrique sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
6. le nombre de relations réflexives et antisymétriques sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
7. le nombre de relations symétriques et antisymétriques sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
8. le nombre de relations d'ordre total sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 6 : : Soit $f \in F^E$,

1. Démontrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F), f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
2. Montrer que f est bijective si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(F), \quad f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$$

Exercice 7 : : Soit $f \in F^E$. On définit les applications suivantes :

$$d : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F), \quad A \mapsto f(A) \quad \text{et} \quad i : \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E), \quad A \mapsto f^{-1}(A)$$

1. Simplifier $d \circ i \circ d$ et $i \circ d \circ i$.
2. Montrer que f est injective $\Leftrightarrow d$ est injective $\Leftrightarrow i$ est surjective
3. Montrer que f est surjective $\Leftrightarrow d$ est surjective $\Leftrightarrow i$ est injective