

Équations différentielles linéaires

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles suivantes (en précisant les intervalles d'étude) :

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $y'(x) + y(x) = x^2 + 1.$ 2. $y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$ 3. $y' - \frac{2x}{1 + x^2}y = 0.$ 4. $y'(x) + \frac{1}{1 - x}y(x) = -\frac{1}{x}.$ 5. $y' - \frac{\cos x}{\sin x}y = -1$ 6. $y' + 2y = (3x^2 + 1)e^{-x}$ | <ol style="list-style-type: none"> 7. $y' - \frac{1}{2x}y = \sqrt{x}$ 8. $y' - \frac{1}{x \ln x}y = \frac{-\ln x + 1}{\ln x}$ 9. $y'(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}y(x) + \frac{1}{\sin(x)} = 0.$ 10. $y' - y \tan(x) + \cos^2(x) = 0.$ 11. $y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2x(1 - x)}$ |
|---|--|

Exercice 2 : Chercher les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $y''(x) + y'(x) = 3 + 2x.$ 2. $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^x.$ 3. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 3x^2 e^{2x}.$ 4. $y'' - 4y' + 4y = (x^3 + x)e^{2x}$ 5. $y'' - 2y' + (1 - a)y = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$ | <ol style="list-style-type: none"> 6. $y'' + y = e^{- x }$ 7. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} + \cos x$ 8. $y'' + 2y' + 5y = \operatorname{sh} x$ 9. $y'' + y = \cos^3 x$ 10. $(1 + x)^2 y'' + (1 + x)y' = 2$ |
|---|--|

Exercice 3 : Soit λ un réel et $L > 0.$

1. Trouver les solutions de $y'' + \lambda y = 0$ s'annulant en 0 et L
2. Trouver les solutions de $y'' + \lambda y = 0$ qui sont bornées sur \mathbb{R}

Exercice 4 :

1. Soit a, b et c trois réels. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E) : ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$$

sur $\mathbb{R}^{+*}.$

Montrer que si y est solution alors $z : t \mapsto y(e^t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

En déduire l'ensemble des solution de E sur $\mathbb{R}^{+*}.$

Comment obtenir celle sur $\mathbb{R}^{-*}?$

2. Déterminer les fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R}^* telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = f\left(\frac{1}{4x}\right)$$

3. Déterminer les fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R}^* telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Plus généralement, les équations de la forme $a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$ peuvent se traiter de façon similaire en se ramenant à une équation différentielle à coefficients constants.

Exercice 5 :

1. Soit a et b continues sur un intervalle I et y solution de $y' + a(x)y^2 + b(x)y = 0$ ne s'annulant pas sur $I.$

Montrer que $z = \frac{1}{y}$ est solution d'une équation différentielle à coefficients constants.

2. Résoudre $y' = y - y^2.$
3. Résoudre $y' = (y - x)^2.$

Plus généralement, on appelle équation de Bernoulli une équation du type :

$$(B) : y' + a(x)y^m + b(x)y = 0$$

où a et b sont continues sur un intervalle I de \mathbb{R} et $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et on pose, quand cela est possible, $z = y^{1-m}.$