Systèmes linéaires

I. Système 2×2

On appelle **système linéaire de 2 équations à 2 inconnues** un système de la forme suivante :

$$(*) \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} a\,x + b\,y & = & e \\ c\,x + d\,y & = & f, \end{array} \right.$$

où x et y sont les **inconnues**, et a, b, c, d, e et f sont des coefficients réels ou complexes. Résoudre ce système revient à trouver tous les couples (x, y) vérifiant simultanément les deux équations.

Remarque.

— Si l'un des couples (a, b) et (c, d) est nul, alors la résolution du système est facile.
— Dans le cas de coefficients réels et lorsque $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$: interprétation géométrique comme intersection de deux droites affines dans le plan de vecteurs directeurs respectifs de coordonnées $(-b, a)$ et $(-d, c)$.
Conclusion géométrique : il existe une unique solution si, et seulement si, $a\,d - b\,c = 0$

Définition. *La quantité $a\,d - b\,c$ est appelée déterminant du système, également notée* $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

Proposition. *(*) Lorsque le déterminant du système est non nul, il admet une unique solution. On dit que le système est un **système de Cramer***

Exercice. *Résoudre le système suivant :* $\left\{ \begin{array}{rcl} 4x + 3y & = & -2 \\ 2x + y & = & 3. \end{array} \right.$

Proposition. *(*) Lorsque le déterminant du système est nul, alors*
— *soit les deux lignes sont proportionnelles et il y a une infinité de solutions*
— *soit il n'y a pas de solution.*

Exercice. *Résoudre le système suivant en fonction des paramètres λ et μ :*

$$(*) \ : \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda x + 2y & = & -2 \\ 2x + y & = & \mu. \end{array} \right.$$

Notions d'inconnues principales et d'inconnues secondaires.

II. Système de 2 équations à 3 inconnues

On appelle **système linéaire de 2 équations à 3 inconnues** un système de la forme suivante :

$$(*) \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} a\,x + b\,y + c\,z & = & g \\ d\,x + e\,y + f\,z & = & h, \end{array} \right.$$

où x, y et z sont les **inconnues**, et a, b, c, d, e, f, g et h sont des coefficients réels ou complexes. Résoudre ce système revient à trouver tous les triplets (x, y, z) vérifiant simultanément les deux équations.

Remarque.

- Si l'un des triplets (a,b,c) et (d,e,f) est nul, alors le système se ramène à une seule équation.
- Dans le cas où les coefficients sont réels, et où $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $(d,e,f) \neq (0,0,0)$. : interprétation géométrique comme intersection de plans dans l'espace de vecteurs normaux respectifs de coordonnées (a,b,c) et (d,e,f).

Exercice. *Résoudre le système suivant :*

$$(*) \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} x+2\,y+4\,z & = & 3 \\ 2\,x+y+z & = & 1. \end{array} \right.$$

Exercice. *Résoudre le système suivant dépendant d'un paramètre* $\lambda \in \mathbb{R}$ *:*

$$(*) \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} x+2\,y+4\,z & = & 3 \\ 3\,x+6\,y+12\,z & = & \lambda. \end{array} \right.$$

III. Cas général : système de n équations à p inconnues

1. Généralités

Étant donné deux entiers naturels n et p non nuls, on appelle système linéaire de n équations à p inconnues x_1, x_2,…, x_p tout système (S) du type :

$$(S) \ : \ \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,j}\,x_j + \cdots + a_{1,p}\,x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}\,x_1 + a_{i,2}\,x_2 + \cdots + a_{i,j}\,x_j + \cdots + a_{i,p}\,x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \cdots + a_{n,j}\,x_j + \cdots + a_{n,p}\,x_p = b_n \end{array} \right.$$

où $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$.

- Les $a_{i,j}$ sont appelés les **coefficients** du système.
- Le vecteur $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est appelé le **second membre** du système.
- Lorsque $b = (0, \ldots, 0)$ on dit que le système est **homogène**, ou encore qu'il est « **sans second membre** ».
- On appelle **solution du système** toute p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant les n équations de (S).
- Le système (S_0) obtenu en remplaçant tous les b_i par 0 est appelé **système homogène associé** à (S).
- On dit qu'un système est **carré** s'il a autant d'équations que d'inconnues.

Remarque. *Tout système homogène est compatible car il admet comme solution :* $(0, \ldots, 0)$.

2. Systèmes triangulaires

Certains systèmes linéaires sont « plus faciles » à résoudre que d'autres. Nous présentons dans cette partie les systèmes triangulaires, dont la résolution est particulièrement aisée.

Exercice. *Résoudre*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ x_2 - x_3 & = & 1 \\ 2x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

Définition. *On dit que le système (S) est* **triangulaire** *si ses coefficients vérifient :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0.$$

Remarque. *Si (S) est carré, triangulaire et si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, alors il possède une unique solution, que l'on détermine composante par composante, en partant de la dernière équation et en remontant.*

3. Opérations élémentaires sur les lignes

Définition. *Deux systèmes sont dits équivalents s'il possèdent les mêmes solutions.*

Définition. *On appelle opérations élémentaires le opérations suivantes*
- ***Échange de deux lignes :*** $L_i \leftrightarrow L_j$
- ***Ajout à une ligne d'un multiple d'une autre*** *:* $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ *avec* $i \neq j$
- ***Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul*** *:* $L_i \leftarrow \mu L_i$ *avec* $\mu \neq 0$.

Proposition. *Toute opération élémentaire transforme un système en un système qui lui est équivalent.*

Remarque. *Une opération de la forme $L_i \leftarrow \mu L_i + \lambda L_j$ avec $\mu \neq 0$ et $i \neq j$, transforme un système en un système qui lui est équivalent.*

La méthode du pivot de Gauss permet, en effectuant des **opérations élémentaires** sur les lignes, de transformer un système linéaire en un système triangulaire.

Exercice. *Résoudre les systèmes*

$$(*) \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + \ x_2 - 2x_3 & = & 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 - \ x_2 - 2x_3 & = & 5. \end{array} \right.$$

$$(*) \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_2 - \ x_3 & = & 1 \\ x_1 - \ x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ 7x_1 + \ x_2 + 4x_3 & = & 5. \end{array} \right.$$

$$(*) \ : \ \left\{ \begin{array}{ccccccc} (a+1)\,x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & (a-2)\,x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & (a-3)\,x_3 & = & 1. \end{array} \right.$$

4. Structure de l'ensemble des solutions

On considère ici un système linéaire $(*)$ et $(*_0)$ le système homogène associé.
La proposition suivante explique comment la résolution du système $(*)$ se ramène, lorsque celui-ci admet une solution (au moins), à :
- déterminer une solution particulière de $(*)$;
- résoudre le système homogène $(*_0)$.

Proposition. *(*) Si $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_p)$ et $\omega' = (\omega'_1, \ldots, \omega'_p)$ sont solutions de $(*_0)$, alors pour tout (λ, μ), $\lambda\omega + \mu\omega'$ est solution de $(*_0)$.*

Proposition. *(*) Si $(\omega_1, \ldots, \omega_p)$ désigne une solution de $(*)$, alors l'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble*

$$\{(\omega_1 + h_1, \ldots, \omega_p + h_p), \ (h_1, \ldots, h_p) \text{ solution de } (*_0)\}.$$