Ensembles et applications

I. Ensembles

1. Généralités

La notion d'ensemble est une notion intuitive : c'est une collection d'objets appelés éléments. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels et l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
Lorsqu'un élément x appartient à un ensemble E, on note $x \in E$.
La négation $\overline{x \in E}$ se note $x \notin E$.

Remarque. *Il y a plusieurs façons de définir un ensemble :*

- *de manière descriptive :* $A = \{0, 1, 2\}$
- *de manière conditionnelle :* $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \leq 2\}$

Définition. *On dit qu'un ensemble F est un sous-ensemble (ou une partie) de l'ensemble E si tout élément de F est aussi élément de E. On dit aussi que F est inclus dans E et on note $F \subset E$.*

$$F \subset E \Leftrightarrow \forall x \in F, \ x \in E$$

Par exemple, on a la chaine d'inclusion suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Proposition. *Soient E, F et G trois ensembles, on a*

- $\emptyset \subset E$.
- $E \subset E$, *ce qui signifie que l'inclusion est réflexive.*
- $(E \subset F) \wedge (F \subset G) \Rightarrow (E \subset G)$, *ce qui signifie que l'inclusion est transitive*

Définition. *Deux ensembles E et F sont dits égaux et on note $E = F$ si E est inclus dans F et F est inclus dans E.*

$$E = F \Leftrightarrow (F \subset E) \wedge (E \subset F) \Leftrightarrow (\forall x \in F, \ x \in E) \wedge (\forall x \in E, \ x \in F)$$

Remarque. *On a toujours $E = E$. La relation "=" est réflexive.*

En pratique, pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, on procède ainsi par double inclusion. On commence par supposer que $x \in F$ et on montre que $x \in E$ ce qui montre la première inclusion $F \subset E$ puis on montre l'inclusion réciproque $E \subset F$ de la même manière.

Proposition. *Si A et B sont deux parties de E, alors on a l'équivalence*

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in E, \ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Définition. *L'ensemble des parties d'un ensemble E est un ensemble noté $\mathcal{P}(E)$. On a donc*

$$F \subset E \Leftrightarrow F \in \mathcal{P}(E)$$

Proposition. *Soient E et F deux ensembles, on a alors*

$$E \in \mathcal{P}(E), \qquad \emptyset \in \mathcal{P}(E)$$
$$a \in E \Leftrightarrow \{a\} \subset E \Leftrightarrow \{a\} \in \mathcal{P}(E)$$
$$E \subset F \Leftrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$$

2. Opérations sur les ensembles

Définition. *On appelle intersection de deux ensembles E et F et on note $E \cap F$, l'ensemble dont les éléments appartiennent à la fois à E et à F.*

$$x \in E \cap F \Leftrightarrow (x \in E) \wedge (x \in F)$$

On dit que deux ensembles E et F sont disjoints si leur intersection est l'ensemble vide. On dit qu'il s'intersectent ou qu'ils ont une intersection non vide sinon.

Proposition. *Soient E, F et G trois ensembles, on a alors*

$$E \cap \emptyset = \emptyset \qquad E \cap E = E$$
$$E \cap F = F \cap E \quad \text{(La loi $\cap$ est commutative)}$$
$$(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G) \quad \text{(La loi $\cap$ est associative)}$$

L'associativité de la loi $\cap$ autorise à noter $E \cap F \cap G$ l'ensemble $(E \cap F) \cap G$ puisque la position des parenthèse n'a aucune importance.

Proposition. *Soient E et F deux ensembles, on a alors*

$$F \subset E \Leftrightarrow E \cap F = F$$
$$\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$$

Définition. *On appelle réunion de deux ensembles E et F et on note $E \cup F$, l'ensemble dont les éléments appartiennent à E ou bien à F.*

$$x \in E \cup F \Leftrightarrow (x \in E) \vee (x \in F)$$

Proposition. *Soient E, F et G trois ensembles, on a alors*

$$E \cup \emptyset = E \qquad E \cup E = E$$
$$E \cup F = F \cup E \quad \text{(La loi $\cup$ est commutative)}$$
$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G) \quad \text{(La loi $\cup$ est associative)}$$

De même que pour l'intersection, on note $E \cup F \cup G$ l'ensemble $(E \cup F) \cup G$ puisque la position des parenthèse n'a aucune importance.

Proposition. *Soient E, F et G trois ensembles, on a alors*

$$F \subset E \Leftrightarrow E \cup F = E$$
$$\mathcal{P}(E \cup F) \supset \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$$

Exercice. *Soient E et F deux ensembles.*
On a $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ si, et seulement si, $E \subset F$ ou $F \subset E$.

Proposition. *Soient E, F et G trois ensembles, on a alors*

$$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$$

$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$$

On dit que la loi $\cup$ est distributive par rapport à la loi $\cap$ et inversement.

Définition. *Soit F une partie d'un ensemble E. On appelle complémentaire de F dans E et on note $C_E F$ ou $E \backslash F$ (ou bien $\bar{F}$ s'il n'existe pas d'ambiguïté sur l'ensemble E) l'ensemble constitué des éléments de E qui n'appartiennent pas à F.*

$$x \in E \backslash F \Leftrightarrow (x \in E) \wedge (x \notin F)$$

Proposition. *Soient A et B deux parties de E, on a alors*

$$\overline{\emptyset} = E \qquad \overline{E} = \emptyset$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{A} = B \Leftrightarrow \overline{B} = A$$

$$A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Définition. *Plus généralement, si A et B sont deux ensembles, on note $A \backslash B$ l'ensemble formé des éléments de A n'appartenant pas à B.*

$$A \backslash B = \{x \in A \ : \ x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

Définition. *Soient E et F deux ensembles.*
On appelle produit cartésien de E et F et on note $E \times F$ l'ensemble formé des couples d'éléments dont le premier est dans E et le deuxième dans F. Ainsi, on a :

$$(x, y) \in E \times F \Leftrightarrow (x \in E) \wedge (y \in F)$$

Proposition. *Soient A, A',B, B' et C des parties de E, on a alors*

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset) \vee (B = \emptyset)$$
$$(A \subset A') \wedge (B \subset B') \Rightarrow A \times B \subset A' \times B'$$
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
$$(A \times B = A \times C) \wedge (A \neq \emptyset) \Rightarrow B = C$$

Exercice. *Soient A, B, C et D des ensembles. Montrer*

$$(A \cup B) \times (C \cup D) \supset (A \times C) \cup (B \times D)$$

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

Définition. *On généralise l'intersection et la réunion de deux ensembles de la manière suivante : soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$, une famille (non nécessairement finie) de parties de E. On appelle intersection et réunion des éléments de $\mathcal{F}$ les ensembles :*

$$\bigcap_{X \in \mathcal{F}} X = \{x \in E \ : \ \forall X \in \mathcal{F}, \ x \in X\}$$

$$\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X = \{x \in E, \ \exists X \in \mathcal{F} \ : \ x \in X\}$$

On dit que $\mathcal{F}$ est un recouvrement de E si $\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X = E$.

Remarquons que lorsque la famille $\mathcal{F}$ ne contient que deux parties de E, on retrouve la définition de l'intersection et de la réunion présentée ci-dessus.

Définition. *Soit $\mathcal{F}$ un recouvrement de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une partition de E si ses éléments sont non vides et deux à deux disjoints, c'est à dire*

$$\forall (X, X') \in \mathcal{F}^2, X \neq X' \Rightarrow X \cap X' = \emptyset$$

Par exemple, on peut former une partition de E à deux éléments en considérant une partie $A \subset E$ et son complémentaire $\bar{A}$.