Rappels et compléments sur les nombres réels

I. Inégalités dans $\mathbb{R}$

1. Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$ muni d'une relation d'ordre total notée $\leq$ compatible avec les lois $+$ et $\times$ et qui prolonge celles définies sur $\mathbb{Q}$.
Plus précisément, $\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases} \Rightarrow x + y \leq x' + y'$$

Pour "multiplier des inégalités", il faut faire attention aux signes :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq x' \\ 0 \leq y \leq y' \end{cases} \Rightarrow xy \leq x'y'$$

Attention à changer le sens de l'inégalité lorsqu'une inégalité est multipliée par un réel négatif.

On prolonge $\mathbb{R}$ en la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ et les opérations $+$ et $\times$ par :

$+$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**?**
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x + y$	$+\infty$
$+\infty$	**?**	$+\infty$	$+\infty$

et

$\times$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}^{-*}$	0	$y \in \mathbb{R}^{+*}$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**?**	$-\infty$	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}^{-*}$	$+\infty$	$x \times y$	0	$x \times y$	$-\infty$
0	**?**	0	0	0	**?**
$x \in \mathbb{R}^{+*}$	$-\infty$	$x \times y$	0	$x \times y$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**?**	$+\infty$	$+\infty$

La relation d'ordre total $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est prolongée sur $\overline{\mathbb{R}}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

2. Majorant et maximum

Définition. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*
- *On dit que $m \in E$ est un minorant de A si $\forall x \in A : m \leq x$*
- *On dit que $M \in E$ est un majorant de A si $\forall x \in A : x \leq M$*

Définition. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*
- *On dit que A est minorée si elle admet un minorant.*
- *On dit que A est majorée si elle admet un majorant.*
- *On dit que A est bornée si elle est majorée et minorée.*

Définition. *On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément ou un maximum s'il existe un majorant de A qui appartienne à A c'est-à-dire si*

$$\exists a \in A \,:\, \forall x \in A,\ x \leq a.$$

Définition. *On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ admet un plus petit élément ou un minimum s'il existe un minorant de A qui appartienne à A c'est-à-dire si*

$$\exists a \in A \,:\, \forall x \in A,\ a \leq x.$$

Proposition. *Si A admet un plus grand élément (respectivement plus petit élément) alors celui-ci est unique. Il est noté $MaxA$ (respectivement $MinA$).*

Remarque : Tous ces éléments n'existent pas forcément.
Par exemple, la partie $\mathbb{R}^+$ n'est pas majorée et ne possède donc pas de plus grand élément.
Mais une partie de $\mathbb{R}$ majorée n'admet pas forcément de plus grand élément. Par exemple, l'intervalle $]0,1[$ est majoré, mais ne possède pas de plus grand élément. En revanche, dans certains cas leur existence est assurée :

1. lorsque la partie est finie et non vide ;
2. lorsque l'on considère une partie non vide de $\mathbb{Z}$ majorée ou minorée.

II. Théorèmes d'existence de maximum et conséquences

1. Théorèmes

Théorème. *(*) Toute partie finie non vide de $\mathbb{R}$ possède un plus petit et un plus grand élément. Ainsi, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on peut définir les quantités $Min\{x_1, ..., x_n\}$ et $Max\{x_1, ..., x_n\}$.*

Théorème. *(*)*
- *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*
- *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.*

Théorème. *(*)*
- *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.*
- *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.*

2. Quelques conséquences

Définition. *Soit x un réel, on appelle parties positive et négative de x, les réels positifs*

$$x^+ = Max(0, x) \ \text{ et } \ x^- = Max(0, -x)$$

On appelle valeur absolue de x le réel positif $|x| = Max(-x, x)$.

Proposition. *Pour tout réel x, on a*

$$x^+ + x^- = |x|, \quad x^+ - x^- = x, \quad x^+ = \frac{x + |x|}{2} \quad \text{et} \quad x^- = \frac{|x| - x}{2}.$$

Proposition. *(*) Existence de la partie entière.*
Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$. Cette entier relatif est appelé la partie entière de x et est notée $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.

Corolaire. *(*) Soit x un réel et n un entier non nul alors*

$$\exists! p_n \in \mathbb{Z} \,:\, p_n 10^{-n} \leq x < (p_n + 1)10^{-n}$$

Le rationnel $p_n 10^{-n}$ est la valeur décimale approchée de x à 10^{-n} près par défaut et le rationnel $(p_n + 1)10^{-n}$ est la valeur décimale approchée de x à 10^{-n} près par excès.

Théorème. *(*) L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ et l'ensemble des rationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses i.e.*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x < y \ \Rightarrow \ \exists q \in \mathbb{Q} \, : \, x < q < y$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x < y \ \Rightarrow \ \exists i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \, : \, x < i < y$$

III. Théorème de la borne supérieure et une première conséquence

1. Définition de la borne supérieure et caractérisation

Contrairement à ce qui se passe dans $\mathbb{Z}$, il existe des parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ n'admettant pas de plus grand élément comme $A = [0, 1[$. Néanmoins, le réel 1 joue un rôle particulier pour la partie A : c'est le plus petit des majorants de A. On dit que 1 est la borne supérieure de A.

Définition. *On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure si l'ensemble de ses majorants possède un plus petit élément. On appelle alors borne supérieure de A et on note $Sup\, A$ ce plus petit élément.*
On définit de même la borne inférieure de A, si elle existe.

Proposition. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes*
- *A admet un plus grand élément a.*
- *$SupA$ existe et $SupA \in A$.*

Proposition (Caractérisation de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$). *(*)*
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ alors

$$s = Sup\ A \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \forall a \in A : a \leq s \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A : s - \varepsilon < a \end{cases}$$

Proposition (Caractérisation de la borne inférieure dans $\mathbb{R}$).
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ alors

$$i = Inf\ A \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \forall a \in A : i \leq a \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A : a < i + \varepsilon \end{cases}$$

Remarque : En général, on est pas assuré de l'existence de la borne supérieure d'une partie. Par exemple, la partie $\{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ alors qu'elle est majorée. En revanche, dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, on dispose "par construction" de la propriété de la borne supérieure.

2. Théorème de la borne supérieure et caractérisation des intervalles

Théorème. *de la borne supérieure [Admis]*
Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure

Théorème. *(*) Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si*

$$\forall (a,b) \in I^2, \ [a,b] \subset I$$

On dit que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les convexes de $\mathbb{R}$.

IV. Topologie dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

1. Voisinages

Définition. *Soit $a \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble*

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{K} \,:\, |x-a| < r\}$$

et boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B_f(a,r) = \{x \in \mathbb{K} \,:\, |x-a| \leq r\}$$

Définition. *Soit $a \in \mathbb{K}$ et $V \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$. On dit que V est un voisinage de a lorsque il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset V$.*

Notation. *Soit $a \in \mathbb{K}$. On note $\mathcal{V}(a)$, l'ensemble des voisinages de a.*

Proposition. *Soit $a \in \mathbb{K}$ et $(V,V') \in \mathcal{P}(\mathbb{K})^2$. Si V est un voisinage de a et si $V \subset V'$, alors V' est un voisinage de a.*

Proposition. *Soit $a \in \mathbb{K}$. Une intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a, une union quelconque de voisinages de a est un voisinage de a.*

Proposition. *Soit $(a,a') \in \mathbb{K}^2$. Si $a \neq a'$, alors il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ et $V' \in \mathcal{V}(a')$ tel que $V \cap V' = \emptyset$.*

Définition. *Soit $V \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On dit que V est un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque il existe $r > 0$ tel que $[r, +\infty[\subset V$ (resp. $]-\infty, r[\subset V$).*

Les propriétés précédentes se prolongent.

2. Ouverts et fermés

Définition. *Soit $\Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$. On dit que Ω est un ouvert de $\mathbb{K}$ lorsque :*

$$\forall a \in \Omega,\ \exists r > 0 \,:\, B(a,r) \subset V$$

autrement dit lorsque Ω est voisinage de chacun de ses points.

Définition. *Soit $F \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$. On dit que F est un fermé de $\mathbb{K}$ lorsque $E \setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{K}$.*

Proposition. *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert, une union quelconque d'ouverts est un ouvert.*

Corolaire. *Une union finie de fermés est un fermé, une union quelconque de fermés est un fermé.*

Proposition. *Toute boule ouverte est ouverte et toute boule fermée est fermée.*

3. Intérieur et adhérence

Définition. *Soit $x \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$. On dit que x est un point intérieur à A lorsque A est un voisinage de x.*

Notation. *Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$. On note $\mathring{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A.*

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$. $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A*

Définition. *Soit $x \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$. On dit que x est un point adhérent à A lorsque :*

$$\forall r > 0,\ A \cap B(a, r) \neq \emptyset$$

autrement dit lorsque tout voisinage de x rencontre A.

Notation. *Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$. On note $\overline{A}$, l'ensemble des points adhérents à A.*

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$. $\overline{A}$ est le plus petit des fermés contenant A*

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$. On a l'égalité $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{(E \setminus A)}}$.*

Définition. *Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ et B une partie de A.*
On dit que B est dense dans A lorsque $A \subset \overline{B}$

Définition. *Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.*
On dit que $+\infty$ est adhérent à A lorsque :

$$\forall r > 0,\ A \cap [r, +\infty[\neq \emptyset$$

autrement dit lorsque tout voisinage de $+\infty$ rencontre A.
On dit que $-\infty$ est adhérent à A lorsque :

$$\forall r > 0,\ A \cap]-\infty, r[\neq \emptyset$$

autrement dit lorsque tout voisinage de $-\infty$ rencontre A.