

# Suites réelles et complexes

## I. Définition et premières propriétés

**Définition.** Une suite réelle (resp. complexe) est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ). Une application  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $n \mapsto u(n)$  sera notée  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et on dira que  $u_n$  est son terme général.

**Remarque :** On s'intéressera aussi à des suites tronquées  $(u_n)_{n \geq n_0}$

**Définition.** On dit qu'une suite  $u$  est constante si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$ .

**Définition.** On dit qu'une suite  $u$  est stationnaire si  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$ .

**Définition.** On dit qu'une suite réelle  $u$  est majorée si  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ .

**Définition.** On dit qu'une suite réelle  $u$  est minorée si  $\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$ .

**Définition.** On dit qu'une suite réelle ou complexe  $u$  est bornée si  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ .

**Définition.** On dit qu'une suite réelle  $u$  est croissante si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ .

**Définition.** On dit qu'une suite réelle  $u$  est décroissante si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ .

**Définition.** On dit qu'une suite réelle  $u$  est monotone si elle est croissante ou décroissante.

**Remarque :** On dit qu'une propriété (\*) est vérifiée à partir d'un certain rang s'il existe un entier  $n_0$  tel que  $(u_n)_{n \geq n_0}$  vérifie (\*).

Par exemple une suite est stationnaire si, et seulement si, elle est constante à partir d'un certain rang.

**Proposition. (\*)** Une suite réelle est majorée (resp. minorée) si, et seulement si, elle est majorée (resp. minorée) à partir d'un certain rang

**Proposition.** Une suite réelle ou complexe est bornée si, et seulement si, elle l'est à partir d'un certain rang

## II. Suites convergentes

**Définition. (\*)** On dit qu'une suite complexe  $u$  converge vers le complexe  $\ell$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

**Définition.** On dit qu'une suite complexe est convergente s'il existe un complexe  $\ell$  tel que  $u$  converge vers  $\ell$ . On dit que la suite est divergente sinon.

**Proposition. (\*)** Une suite complexe  $u$  converge vers le complexe  $\ell$  si et seulement si les suites réelles  $\text{Ré}(u) = (\text{Ré}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\text{Im}(u) = (\text{Im}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers  $\text{Ré}(\ell)$  et  $\text{Im}(\ell)$ .

**Définition.** (\*) Si une suite  $u$  converge vers deux complexes  $\ell$  et  $\ell'$ , alors  $\ell = \ell'$ . On dit qu'il y a unicité de la limite.

On note alors  $\lim u = \ell$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

**Proposition.** Une suite  $u$  converge vers le complexe  $\ell$  si et seulement si la suite  $u - \ell$  converge vers 0.

**Proposition.** (\*) Si la suite  $u$  converge vers  $\ell$  alors la suite  $|u|$  converge vers  $|\ell|$

**Remarque :** Il n'y a pas de réciproque comme le montre l'exemple de la suite  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Proposition.** (\*) Une suite convergente est bornée

**Remarque :** Il n'y a pas de réciproque comme le montre l'exemple de la suite  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### III. Suites réelles de limite $\pm\infty$

**Proposition.** On dit qu'une suite réelle  $u$  tend vers  $+\infty$  si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq M$$

On note alors  $\lim u = +\infty$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  ou  $u_n \rightarrow +\infty$ .

**Proposition.** On dit qu'une suite réelle  $u$  tend vers  $-\infty$  si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq M$$

On note  $\lim u = -\infty$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  ou  $u_n \rightarrow -\infty$ .

**Remarque :** Une suite divergente ne tend pas nécessairement vers  $\pm\infty$ . Il suffit de considérer la suite  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Remarque :** Une suite réelle  $u$  tend vers  $+\infty$  si

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq M$$

**Proposition.** Une suite réelle  $u$  tend vers  $+\infty$  si et seulement si la suite  $-u$  tend vers  $-\infty$ .

**Proposition.** (\*) Si une suite réelle  $u$  tend vers  $+\infty$  alors elle n'est pas majorée.

**Remarque :** Il n'y a pas de réciproque comme le montre l'exemple de la suite  $(n(-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Proposition.** (\*) Si une suite réelle  $u$  tend vers  $+\infty$  alors elle est minorée.

**Remarque :** Il n'y a pas de réciproque comme le montre l'exemple de la suite  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Remarque :** Il existe des suites non majorées mais minorées ne tendant pas vers  $+\infty$ .

Par exemple,  $(n(1 + (-1)^n))_{n \in \mathbb{N}}$ .

### IV. Opérations sur les limites

**Proposition.** (\*) Soit  $(u, v) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$  de limites finies respectives  $\ell$  et  $\ell'$  alors la suite  $u + v$  converge vers le réel  $\ell + \ell'$ .

**Proposition.** (\*) Soit  $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$  tel que  $u$  diverge vers  $+\infty$  et  $v$  soit minorée alors  $u + v$  diverge vers  $+\infty$ .

**Proposition.** Soit  $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$  tel que  $u$  diverge vers  $-\infty$  et  $v$  soit majorée alors  $u + v$  diverge vers  $-\infty$ .

**Proposition.** (\*) Soit  $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$  de limites respectives  $\ell$  et  $\ell'$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  alors

- Si  $\ell \in \mathbb{R}$  et  $\ell' = +\infty$  alors  $\lim u + v = +\infty$ ,
- Si  $\ell \in \mathbb{R}$  et  $\ell' = -\infty$  alors  $\lim u + v = -\infty$ ,
- Si  $\ell = \ell' = +\infty$  alors  $\lim u + v = +\infty$ ,
- Si  $\ell = \ell' = -\infty$  alors  $\lim u + v = -\infty$ .

**Proposition.** (\*) Le produit d'une suite complexe convergeant vers 0 et d'une suite complexe bornée tend vers 0.

**Proposition.** Soit  $u \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$  de limite finie  $\ell$  alors pour tout complexe  $\lambda$ , la suite  $\lambda u$  converge vers le complexe  $\lambda \ell$ .

**Proposition.** Soit  $(u, v) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$  de limites finies respectives  $\ell$  et  $\ell'$  alors pour tout couple de complexes  $(\lambda, \mu)$ , la suite  $\lambda u + \mu v$  converge vers le complexe  $\lambda \ell + \mu \ell'$ .

**Proposition.** (\*) Soit  $(u, v) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$  de limites finies respectives  $\ell$  et  $\ell'$  alors la suite  $uv$  converge vers le complexe  $\ell \ell'$ .

**Proposition.** (\*) Le produit d'une suite réelle divergeant vers  $+\infty$  et d'une suite réelle minorée par  $m > 0$  diverge vers  $+\infty$ .

**Remarque :** Il suffit que la minoration ait lieu à partir d'un certain rang.

**Remarque :** Il n'y a pas équivalence entre "être minorée par  $m > 0$ " et "être strictement positive" comme le montre l'exemple de la suite  $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Proposition.** (\*) Soit  $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$  de limites respectives  $\ell$  et  $\ell'$  alors

- Si  $\ell = \ell' = +\infty$  et  $\ell' \in \mathbb{R}^{+*}$  alors  $\lim uv = +\infty$ ,
- Si  $\ell = +\infty$  et  $\ell' \in \mathbb{R}^{+*}$  alors  $\lim uv = +\infty$ ,
- Si  $\ell = +\infty$  et  $\ell' \in \mathbb{R}^{-*}$  alors  $\lim uv = -\infty$ ,
- Si  $\ell = +\infty$  et  $\ell' = -\infty$  alors  $\lim uv = -\infty$ .

**Proposition.** (\*) Soit  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  ne s'annulant pas alors la suite  $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et :

- si  $\lim u = \ell \in \mathbb{C}^*$  alors  $\lim \frac{1}{u} = \frac{1}{\ell}$ ,
- si  $\lim u = 0$  alors  $\lim \left|\frac{1}{u}\right| = +\infty$ ,
- si  $\lim |u| = +\infty$  alors  $\lim \frac{1}{u} = 0$ .

## V. Limites et inégalités

**Proposition.** (\*) Passage à la limite dans les inégalités larges

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  convergente majorée par  $M$  alors  $\lim u \leq M$

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  convergente minorée par  $m$  alors  $m \leq \lim u$

**Corolaire.** Si  $u$  est une suite réelle positive convergente alors sa limite est positive.

**Remarque :** Les inégalités strictes ne passent pas à la limite : une suite strictement positive convergente n'a pas forcément une limite strictement positive comme le montre l'exemple de la suite  $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Corolaire.** Soit  $u$  et  $v$  deux suites réelles convergentes. Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ , alors  $\lim u \leq \lim v$ .

**Proposition.** (\*) Si une suite réelle  $u$  converge vers  $\ell$  et si  $m < \ell$  (resp.  $\ell < M$ ) alors, à partir d'un certain rang, la suite est strictement minorée par  $m$  (resp. majorée par  $M$ ).

**Corolaire.** Si une suite réelle  $u$  converge vers  $l > 0$  alors la suite  $u$  est strictement positive à partir d'un certain rang

**Remarque :** Si une suite réelle  $u$  converge vers  $l$  et si  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n < l$ , alors on a pas forcément l'inégalité  $u_n < v_n$  vraie à partir d'un certain rang. Il suffit de prendre  $u = v = \left(\frac{-1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Corolaire.** Soit  $u$  et  $v$  deux suites réelles convergentes. Si  $\lim u < \lim v$  alors à partir d'un certain rang  $u < v$ .

## VI. Théorème d'existence de limites

**Théorème. d'encadrement (\*)**

Soit  $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^3$ ,

- si  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \leq w_n$  et si  $\lim v = \lim w = \ell \in \mathbb{R}$  alors la suite  $u$  converge vers  $\ell$ .
- si  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n$  et si  $\lim v = +\infty$  alors la suite  $u$  diverge vers  $+\infty$ .
- si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq w_n$  et si  $\lim w = +\infty$  alors la suite  $u$  diverge vers  $-\infty$ .

**Remarque :** Ces résultats sont conservés si l'encadrement, la minoration ou la majoration de la suite  $u$  est vraie à partir d'un certain rang.

**Théorème. de la limite monotone (\*)**

Toute suite réelle monotone possède une limite dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Plus précisément,

- si  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est croissante et non majorée alors  $u$  diverge vers  $+\infty$ ,
- si  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est croissante et majorée alors  $u$  converge vers  $\text{Sup}\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ ,
- si  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est décroissante et non minorée alors  $u$  diverge vers  $-\infty$ ,
- si  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est décroissante et minorée alors  $u$  converge vers  $\text{Inf}\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ .

**Remarque :** Si  $u$  est une suite croissante à partir d'un rang  $n_0$  et majorée, alors elle converge vers  $\text{Sup}\{u_n, n \geq n_0\}$ ,

**Définition.** On dit que les suites réelles  $u$  et  $v$  sont adjacentes si  $u$  est croissante,  $v$  est décroissante,  $\lim(u - v) = 0$  et  $u \leq v$ .

**Remarque :** Si  $u$  et  $v$  vérifient  $u$  est croissante,  $v$  est décroissante,  $\lim(u - v) = 0$ , alors  $u \leq v$ .

**Théorème. des suites adjacentes (\*)**

Si deux suites réelles  $u$  et  $v$  sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite.

## VII. Suites extraites

**Définition.** Soit  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . On appelle suite extraite de  $u$  toute suite de la forme  $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  où  $\phi$  est une application strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ . On dit que  $\phi$  est une extractrice.

**Proposition.** Si la suite  $v$  est extraite de la suite  $u$  et si la suite  $w$  est extraite de la suite  $v$  alors la suite  $w$  est extraite de la suite  $u$ .

**Proposition.** Si  $u$  est majorée (resp. minorée ou bornée), alors toute suite extraite de  $u$  l'est aussi.

**Proposition.** Si  $u$  est croissante (resp. décroissante), alors toute suite extraite de  $u$  l'est aussi.

**Proposition.** Si  $u$  est strictement croissante (resp. strictement décroissante), alors toute suite extraite de  $u$  l'est aussi.

**Proposition.** Soit  $\phi$  une extractrice alors  $\forall n \in \mathbb{N}, \phi(n) \geq n$ .

**Proposition.** (\*) Une suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

**Remarque :** Ce résultat est souvent utilisé pour montrer la divergence d'une suite.

**Théorème.** (\*) Si les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers la même limite alors la suite  $u$  converge.

**Remarque :** Il s'agit même d'une équivalence

**Théorème.** de Bolzano-Weierstrass réel (admis) :

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

**Théorème.** de Bolzano-Weierstrass complexe (\*) :

De toute suite complexe bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

## VIII. Traduction séquentielle de certaines propriétés

**Proposition.** (\*) Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{K}$  et  $x \in \mathbb{K}$ .

Le réel  $x$  est adhérent à  $A$  si, et seulement si,  $x$  est limite d'une suite d'éléments de  $D$ .

**Corolaire.** (\*) Une partie  $D$  de  $\mathbb{K}$  est dense dans  $A$  si, et seulement si,

$$\forall a \in A \exists u \in D^{\mathbb{N}} : \lim u = a.$$

**Corolaire.** (\*) Une partie  $D$  de  $\mathbb{R}$  est dense si, et seulement si, tout réel est limite d'une suite d'éléments de  $D$ .

**Corolaire.** (\*) Une partie  $F$  de  $\mathbb{R}$  est fermée si, et seulement si,

$$\forall u \in F^{\mathbb{N}} u \text{ converge} \Rightarrow \lim u \in F.$$

**Proposition.** (\*) Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ . On a  $s = \text{Sup}A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : a \leq s \\ \exists u \in A^{\mathbb{N}} : \lim u = s \end{cases}$

## IX. Suites particulières

### 1. Suites arithmético-géométrique

**Définition.** On dit que la suite  $u$  est arithmétique de raison  $r$  si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$ .

**Proposition.** Si  $u$  est une suite arithmétique de raison  $r$ , alors on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$  et

$$\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2, n_1 \leq n_2 \Rightarrow \sum_{k=n_1}^{n_2} u_k = (n_2 - n_1 + 1) \frac{u_{n_1} + u_{n_2}}{2}$$

**Proposition.** Si  $u$  est une suite arithmétique réelle de raison  $r$  alors

- si  $r > 0$  alors la suite  $u$  est strictement croissante et  $\lim u = +\infty$ ,
- si  $r < 0$  alors la suite  $u$  est strictement décroissante et  $\lim u = -\infty$ ,
- si  $r = 0$  alors la suite  $u$  est constante à  $u_0$ .

**Proposition.** (\*) Si  $u$  est une suite arithmétique complexe alors elle converge si et seulement si elle est constante.

**Définition.** On dit que la suite  $u$  est une suite géométrique de raison  $q$  si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$ .

**Proposition.** si  $u$  est une suite géométrique de raison  $q$ , alors on a :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = q^n u_0$  et

$$\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2, n_1 \leq n_2 \Rightarrow \sum_{k=n_1}^{n_2} u_k = \begin{cases} (n_2 - n_1 + 1)u_{n_1} & \text{si } q = 1 \\ u_{n_1} \frac{1 - q^{n_2 - n_1 + 1}}{1 - q} & \text{sinon} \end{cases}$$

**Proposition.** (\*) Soit  $u$  une suite géométrique réelle non constante à zéro (i.e.  $u_0 \neq 0$ ) de raison  $q$

- si  $q \leq -1$  alors la suite  $u$  est divergente et n'a pas de limite dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ,
- si  $q \in ]-1, 1[$  alors la suite  $u$  converge vers zéro,
- si  $q = 1$  alors la suite  $u$  est constante à  $u_0$ .
- Si  $q > 1$  alors
  - Si  $u_0 > 0$  alors la suite  $u$  est strictement croissante et  $\lim u = +\infty$
  - Si  $u_0 < 0$  alors la suite  $u$  est strictement décroissante et  $\lim u = -\infty$

**Proposition.** (\*) Soit  $u$  une suite géométrique complexe de raison  $q$  non constante à zéro

- si  $|q| < 1$  alors la suite  $u$  converge vers zéro,
- si  $|q| > 1$  alors la suite  $u$  diverge et  $\lim |u| = +\infty$ ,
- si  $q = 1$  alors la suite  $u$  est constante à  $u_0$ .
- si  $|q| = 1$  et  $q \neq 1$  alors la suite  $u$  est divergente.

**Définition.** On dit que la suite  $u$  est une suite arithmético-géométrique si

$$\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2 : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

**Remarque :** Dans ce cas, si  $a \neq 1$ , alors la suite  $u - \frac{b}{1-a}$  est géométrique de raison  $a$ .

Ainsi, en posant  $\ell = \frac{b}{1-a}$ , on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$  et

$$\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2, n_1 \leq n_2 \Rightarrow \sum_{k=n_1}^{n_2} u_k = (u_{n_1} - \ell) \frac{1 - q^{n_2 - n_1 + 1}}{1 - q} + (n_2 - n_1 + 1)\ell$$

## 2. Suites récurrentes linéaires d'ordre deux à coefficients constants

**Définition.** On dit que la suite  $u$  vérifie une relation linéaire d'ordre deux à coefficients constants si  $\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2 : \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

**Proposition.** Une telle suite est entièrement déterminée par  $u_0$  et  $u_1$

**Proposition.** Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  alors l'ensemble des suites réelles (respectivement complexes) vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  est stable par combinaison linéaire.

**Théorème.** (\*) Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  et  $S_{\mathbb{C}}^{a,b} = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ .

On introduit le polynôme associé  $P = X^2 - aX - b$

- Si le polynôme  $P$  a deux racines distinctes dans  $\mathbb{C}$ ,  $r_1$  et  $r_2$ , alors

$$S_{\mathbb{C}}^{a,b} = \{(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

- Si le polynôme  $P$  a une racine double dans  $\mathbb{C}$ ,  $r_0$ , alors

$$S_{\mathbb{C}}^{a,b} = \{(\lambda r_0^n + \mu n r_0^{n-1})_{n \in \mathbb{N}}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

**Théorème.** (\*) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $S_{\mathbb{R}}^{a,b} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ .

On introduit le polynôme associé  $P = X^2 - aX - b$

— Si le polynôme  $P$  a deux racines distinctes dans  $\mathbb{R}$ ,  $r_1$  et  $r_2$ , alors

$$S_{\mathbb{R}}^{a,b} = \{(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

— Si le polynôme  $P$  a une racine double dans  $\mathbb{R}$ ,  $r_0$ , alors

$$S_{\mathbb{R}}^{a,b} = \{(\lambda r_0^n + \mu n r_0^{n-1})_{n \in \mathbb{N}}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

— Si le polynôme  $P$  n'a pas de racine dans  $\mathbb{R}$ , alors il admet dans  $\mathbb{C}$  deux racines conjuguées,  $\rho e^{\pm i\theta}$ , et

$$S_{\mathbb{R}}^{a,b} = \{(\rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)))_{n \in \mathbb{N}}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \{(\rho^n A \cos(n\theta + \phi))_{n \in \mathbb{N}}, (A, \phi) \in \mathbb{R}^2\}$$

### 3. Suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit  $D$  une partie de  $\mathbb{C}$  et  $f$  une fonction de  $D$  dans  $D$  alors pour tout  $d \in D$ , on peut définir de

façon unique une suite  $u$  par  $(\star) \begin{cases} u_0 = d \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ .

On dit que la suite  $u$  est définie par récurrence.

**Proposition.** *(\*) Soit  $D$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $D$  dans  $D$  et  $d \in D$ . On considère la suite  $u$  définie par  $\star$ .*

*Si  $f$  est croissante sur  $D$  alors*

- $u$  est croissante si  $u_0 \leq u_1$
- $u$  est décroissante si  $u_0 \geq u_1$

*Si  $f$  est décroissante sur  $D$  alors*

- si  $u_0 \leq u_2$ , la suite extraite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et la suite extraite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
- si  $u_0 \geq u_2$ , la suite extraite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et la suite extraite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

**Proposition.** *Soit  $D$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $D$  dans  $D$  et  $d \in D$ . On considère la suite  $u$  définie par  $\star$ . Si la suite  $u$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$  et si  $f$  est continue en  $\ell$  alors  $\ell$  est un point fixe de  $f$  i.e.  $f(\ell) = \ell$ .*

## X. Relations de comparaison

### 1. Suites dominées

**Définition.** *Soit  $v$  une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang  $n_0$ .*

*On dit qu'une suite  $u$  est dominée par la suite  $v$  si la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$  est bornée i.e. si*

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \geq n_0, \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq M$$

*On note  $u = O(v)$ .*

**Proposition.**  $u = O(1) \iff u$  est bornée

**Proposition.** *Si  $u = O(v)$  et  $\lim v = 0$  alors  $\lim u = 0$ .*

**Proposition.** *Transitivité :  $u = O(v)$  et  $v = O(w) \implies u = O(w)$*

**Proposition.** *Combinaison linéaire :*

$$u = O(w) \text{ et } v = O(w) \implies \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \lambda u + \mu v = O(w)$$

**Proposition.** *Produit :  $u = O(w)$  et  $v = O(t) \implies uv = O(wt)$*

**Proposition.** *Quotient : Soit  $u$  et  $v$  deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang alors  $u = O(v) \iff \frac{1}{v} = O\left(\frac{1}{u}\right)$*

**Proposition.** *(\*) Puissance positive :*

*Soit  $u$  et  $v$  deux suites strictement positives et  $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$  alors  $u = O(v) \iff u^\alpha = O(v^\alpha)$*

**Proposition.** *(\*) Comparaison logarithmique : Soient  $u$  et  $v$  deux suites strictement positives telles qu'il existe un rang  $n_0$  vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$  alors  $u = O(v)$ .*

**Proposition.** *(\*) Soit  $u$  une suite strictement positive telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$  alors*

- si  $\ell < 1$  alors  $\lim u = 0$ ,
- si  $\ell > 1$  alors  $\lim u = +\infty$ ,
- si  $\ell = 1$  alors on ne peut pas conclure.

## 2. Suites négligeables

**Définition.** *Soit  $v$  une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang  $n_0$ . On dit que la suite  $u$  est négligeable devant la suite  $v$  si la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$  tend vers zéro i.e. si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq \varepsilon.$$

*On note  $u = o(v)$ .*

**Proposition.** *Si la suite  $u$  est négligeable devant la suite  $v$  alors la suite  $u$  est dominée par  $v$ .*

**Proposition.**  $u = o(1) \iff \lim u = 0$

**Proposition.** *Transitivité :  $u = o(v)$  et  $v = o(w) \implies u = o(w)$*

**Proposition.** *Combinaison linéaire :  $u = o(v)$  et  $v = o(w) \implies \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \lambda u + \mu v = o(w)$*

**Proposition.** *Produit : si  $u = O(w)$  et  $v = o(t)$ , alors  $uv = o(wt)$*

**Proposition.** *Quotient : Soit  $u$  et  $v$  deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang alors  $u = o(v) \iff \frac{1}{v} = o\left(\frac{1}{u}\right)$*

**Proposition.** *Puissance positive : Soit  $u$  et  $v$  deux suites strictement positives et  $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$  alors*

$$u = o(v) \iff u^\alpha = o(v^\alpha)$$

**Proposition.** *Croissances comparées :*

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \quad |\ln n|^\beta = o(n^\alpha) \quad \text{et} \quad \forall (\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}^{+*} \times ]1, \infty[, \quad n^\alpha = o(\lambda^n)$$

**Proposition.** *(\*) Pour tout complexe  $\lambda$ ,  $\lambda^n = o(n!)$ .*

**Proposition.** *(\*)  $n! = o(n^n)$*

### 3. Suites équivalentes

**Définition.** Soit  $v$  une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang  $n_0$ . On dit qu'une suite  $u$  est équivalente à la suite  $v$  si la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$  tend vers 1. On note  $u \sim v$

**Proposition.** Soit  $u$  et  $v$  deux suites alors  $u \sim v$  si et seulement si  $u = v + o(v)$ .

**Proposition. (\*)** La relation  $\sim$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites non nulles à partir d'un certain rang.

**Proposition.** Si les suites  $u$  et  $v$  sont équivalentes alors elles sont de même signe à partir d'un certain rang.

**Proposition.** Soit  $u, v$  deux suites et  $\ell \in \mathbb{C} \cup \pm\infty$  alors  $u \sim v$  et  $\lim u = \ell \Rightarrow \lim v = \ell$

**Proposition.** Soit  $u$  une suite et  $\ell \in \mathbb{C}^*$  alors  $u \sim \ell \iff \lim u = \ell$

**Remarque :** Si l'on obtient  $u \sim 0$  c'est sûrement que l'on a fait une erreur comme sommer ou soustraire des équivalents.

**Remarque :** Ne jamais sommer des équivalents. Quand on veut sommer il faut repasser par des  $o$ .

**Proposition. Produit :** Soit  $u_1, v_1, u_2$  et  $v_2$  quatre suites alors

$$u_1 \sim v_1 \text{ et } u_2 \sim v_2 \implies u_1 u_2 \sim v_1 v_2$$

**Proposition. Inverse :** Soit  $u$  et  $v$  deux suites ne s'annulant pas alors

$$u \sim v \iff 1/u \sim 1/v$$

**Proposition. Puissance** Soit  $u$  et  $v$  deux suites strictement positives et  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  alors

$$u \sim v \iff u^\alpha \sim v^\alpha$$

**Proposition.** Si  $u \sim w$  et si  $v = o(w)$  alors  $u + v \sim w$ .

**Remarque :** Écrire  $u \sim \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$  n'apporte pas plus d'informations que d'écrire  $u \sim \frac{1}{n}$

**Proposition.** Si  $\lim u = \ell$ , si  $f$  est dérivable en  $\ell$  et si  $f'(\ell) \neq 0$ , alors

$$f(u_n) - f(\ell) \sim f'(\ell)(u_n - \ell).$$

**Proposition.** Si la suite  $u$  tend vers zéro alors  $\sin u_n \sim u_n$ ,  $\tan u_n \sim u_n$ ,  $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ ,  $\exp(u_n) - 1 \sim u_n$ ,  $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ .

**Proposition.** Si la suite  $u$  tend vers zéro alors  $\cos u_n - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$ .