

Limites

Dans tout ce chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans la suite, on s'intéresse à l'existence d'une limite de f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou étant une extrémité de I . On notera $a \in \overline{I}$.

I. Limite d'une fonction en un point

1. Définitions (*)

Définition. Soit $a \in \overline{I}$.

- Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

- Si $a = +\infty$, on dit que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in I, x \geq M \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

- Si $a = -\infty$, on dit que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in I, x \leq M \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Définition. Soit $a \in \overline{I}$.

- Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que f tend vers $+\infty$ en a lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M$$

- Si $a = +\infty$, on dit que f tend vers $+\infty$ en a lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists M' \in \mathbb{R} : \forall x \in I, x \geq M' \Rightarrow f(x) \geq M$$

- Si $a = -\infty$, on dit que f tend vers $+\infty$ en a lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists M' \in \mathbb{R} : \forall x \in I, x \leq M' \Rightarrow f(x) \geq M$$

On note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.

Définition. Soit $a \in \overline{I}$.

- Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que f tend vers $-\infty$ en a lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq M$$

- Si $a = +\infty$, on dit que f tend vers $-\infty$ en a lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists M' \in \mathbb{R} : \forall x \in I, x \geq M' \Rightarrow f(x) \leq M$$

- Si $a = -\infty$, on dit que f tend vers $-\infty$ en a lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists M' \in \mathbb{R} : \forall x \in I, x \leq M' \Rightarrow f(x) \leq M$$

On note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$.

Ces définitions sont lourdes alors que l'idée est la même dans les trois cas : si x est proche de a alors $f(x)$ est proche de ℓ . Par soucis d'unification, on introduit la notion de voisinage.

2. Voisinages

Proposition. (*) Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim u = \ell$ si, et seulement si, pour tout voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de ℓ , il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0, f(x) \in \mathcal{V}_\ell$; c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\forall \mathcal{V}_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, f(x) \in \mathcal{V}_\ell.$$

Proposition. (*) Soit $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors f admet une limite ℓ en a si, et seulement si, pour tout voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de ℓ , il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a dans I tel que $\forall x \in \mathcal{V}_a \cap I, f(x) \in \mathcal{V}_\ell$; c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\forall \mathcal{V}_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists \mathcal{V}_a \in \mathcal{V}(a) : \forall x \in \mathcal{V}_a \cap I, f(x) \in \mathcal{V}_\ell.$$

Définition. Soit $a \in \overline{I}$. On appelle voisinage de a dans I toute intersection de I et d'un voisinage de a .

Proposition. Soit $a \in \overline{I}$ alors tout voisinage de a dans I est non vide et non réduit à un point.

Définition. Soit $a \in \overline{I}$. On dit qu'une propriété sur f est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur un voisinage de a dans I .

Proposition. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. L'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a .

Proposition. Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Si $a \neq b$, alors il existe $\mathcal{V}_a$ un voisinage de a et $\mathcal{V}_b$ un voisinage de b disjoints.

II. Propriétés

Proposition. (*) Si f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{I}$ alors celle-ci est unique.
On note $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\ell = \lim_a f$

Proposition. Si f admet une limite en $a \in I$ alors celle-ci est égale à $f(a)$

Proposition. (*) Si f admet une limite finie en $a \in \overline{I}$ alors f est bornée au voisinage de a .

Proposition. (*) Si f admet une limite strictement positive en $a \in \overline{I}$, alors f est strictement positive au voisinage de a .

Corolaire. Si f admet une limite l en $a \in \overline{I}$ et si $M > l$ (resp. $m < l$), alors, au voisinage de a , f est majorée par M (rep. minorée par m).

Proposition. Si f est positive au voisinage de a et admet une limite en a alors cette limite est positive.

Corolaire. Si f est majorée par M (respectivement minorée par m) au voisinage de a et admet une limite en a alors $\lim_a f \leq M$ (respectivement $\lim_a f \geq m$).

Si f et g admettent des limites en a et si $f \leq g$ au voisinage de a alors $\lim_a f \leq \lim_a g$.

Remarque : Les inégalités strictes ne passent pas à la limite.

III. Limites à droite et à gauche

Définition. Soit $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ tel que a ne soit pas la borne droite de I .

On dit que f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ à droite en a si $f|_{I \cap]a, +\infty[}$ admet une limite ℓ en a .

Remarque : Pour que f admette une limite à droite en $a \in \bar{I}$, il faut que f soit définie à droite de a .

Remarque : Si $a = -\infty$, alors les notions de limites à droite en a et de limite en a coïncident.

Remarque : Si $a = \inf(I)$ et si f n'est pas définie en a , alors les notions de limites à droite en a et de limite en a coïncident.

Si $a = \inf(I)$ et si f est définie en a , alors les notions de limites à droite en a et de limite en a ne coïncident pas forcément.

Remarque : Comme $a \notin I \cap]a, +\infty[$, même si f est définie en a et admet une limite à droite en a , cette limite n'est pas nécessairement égale à $f(a)$

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto E(-x)$ possède une limite à droite en 0 qui vaut -1 et pas $f(0)$.

Traduction : (*)

— Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors f admet une limite ℓ à droite en $a \in \bar{I}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, a < x \leq a + \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

— Si $\ell = +\infty$ alors f admet une limite ℓ à droite en $a \in \bar{I}$ lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, a < x \leq a + \eta \Rightarrow f(x) \geq M$$

— Si $\ell = -\infty$ alors f admet une limite ℓ à droite en $a \in \bar{I}$ lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, a < x \leq a + \eta \Rightarrow f(x) \leq M$$

Proposition. Si f admet une limite $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ à droite en $a \in \bar{I}$ alors celle-ci est unique.

On note $\ell = \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$ ou $\ell = \lim_{a^+} f$

Définition. On dit que f admet une limite $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ à gauche en $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$ si $f|_{I \cap]-\infty, a[}$ admet une limite ℓ en a .

Remarque : Pour que f admette une limite à gauche en $a \in \bar{I}$, il faut que f soit définie à gauche de a .

Traduction :

— Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors f admet une limite ℓ à gauche en $a \in \bar{I}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, a - \eta \leq x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

— Si $\ell = +\infty$ alors f admet une limite ℓ à gauche en $a \in \bar{I}$ lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, a - \eta \leq x < a \Rightarrow f(x) \geq M$$

— Si $\ell = -\infty$ alors f admet une limite ℓ à gauche en $a \in \bar{I}$ lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, a - \eta \leq x < a \Rightarrow f(x) \leq M$$

Proposition. Si f admet une limite $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ à gauche en $a \in \bar{I}$ alors celle-ci est unique.

On note $\ell = \lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x)$ ou $\ell = \lim_{a^-} f$

Proposition. (*) Si a est un point intérieur de I , alors f a une limite en a si et seulement si f a des limites à droite et à gauche en a qui sont égales à $f(a)$.

Extension : Soit f définie sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f admet une limite à gauche (resp. à droite) en a si $f|_{I \cap]-\infty, a[}$ (resp. $f|_{I \cap]a, +\infty[}$) admet une limite en a .

On dit que f admet une limite en a si elle admet des limites à droite et à gauche en a qui sont égales.

Exemple : $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

IV. Opérations sur les limites

Théorème. *Caractérisation séquentielle (*)*

Soit $a \in \bar{I}$ alors f admet une limite $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ si et seulement si

$$\forall u \in I^{\mathbb{N}}, \lim u = a \Rightarrow \lim f(u_n) = \ell$$

Proposition. Soit f et g admettant des limites $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \bar{\mathbb{R}}$ en $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et si $\ell + \ell'$ n'est pas une forme indéterminée, alors $\lim_a (f + g) = \ell + \ell'$.

Proposition. Si $\lim_a f = +\infty$ et si g est minorée au voisinage de a alors $\lim_a (f + g) = +\infty$.

Corolaire. Si $\lim_a f = -\infty$ et si g est majorée au voisinage de a alors $\lim_a f + g = -\infty$.

Proposition. Soit f et g admettant des limites $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \bar{\mathbb{R}}$ en $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et si $\ell\ell'$ n'est pas une forme indéterminée, alors $\lim_a (fg) = \ell\ell'$.

Théorème. Soit f et g telles $\lim_a f = +\infty$ et que g soit minorée au voisinage de a par $m > 0$ alors $\lim_a fg = +\infty$.

Proposition. Si $\lim_a f = \ell \in \mathbb{R}^*$ alors $1/f$ est définie au voisinage de a et $\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$.

Proposition. Si $\lim_a |f| = +\infty$ alors $1/f$ est définie au voisinage de a et $\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$.

Proposition. Si f ne s'annule pas au voisinage de $a \in \bar{I}$ et si $\lim_a f = 0$ alors $\lim_a \left| \frac{1}{f} \right| = +\infty$.

Théorème. Soient f et g respectivement définies sur I et J telles $f(I) \subset J$.

Si $\lim_a f = \ell$ et $\lim_{\ell} g = \ell'$ alors $\lim_a g \circ f = \ell'$

V. Théorème d'existence de limites

Théorème. *Théorème d'encadrement*

Si $f \leq g \leq h$ au voisinage de a et si $\lim_a f = \lim_a g = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim_a h = \ell$.

Théorème. *Théorème de comparaison*

Si $f \leq g$ au voisinage de a et si $\lim_a f = +\infty$ alors $\lim_a g = +\infty$.

Si $f \leq g$ au voisinage de a et si $\lim_a g = -\infty$ alors $\lim_a f = -\infty$.

Théorème. *Théorème de la limite monotone : (*)*

Soit f croissante sur I . Notons $s = \sup(I)$ (resp. $i = \inf(I)$) si I est majoré et $s = +\infty$ (resp. $i = -\infty$) sinon. On a alors :

- f admet une limite à gauche en s . Cette limite est finie et égale à $\sup\{f(x), x \in I \cap]-\infty, s[\}$ si f est majorée et égale à $+\infty$ sinon.
- f admet une limite à droite en i . Cette limite est finie et égale à $\inf\{f(x), x \in I \cap]i, +\infty[\}$ si f est minorée et égale à $-\infty$ sinon.
- f admet une limite à droite et à gauche en tout point intérieur de I et $f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$.

Remarque : Si f est croissante et définie en s , alors, elle possède une limite finie à gauche en s car f est alors majorée par $f(s)$.

VI. Extension aux fonctions complexes

Dans cette partie f est une fonction définie sur I valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition. Soit $a \in \bar{I}$.

— Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

— Si $a = +\infty$, on dit que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in I, x \geq M \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

— Si $a = -\infty$, on dit que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in I, x \leq M \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Remarque : La définition ne change pas mais cette fois, $|\cdot|$ désigne le module et plus la valeur absolue.

Remarque : Pour une fonction à valeurs complexes, on n'écrit pas $\lim_a f = +\infty$ mais on peut écrire $\lim_a |f| = +\infty$

Proposition. Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en $a \in \bar{I}$ alors celle-ci est unique.

On note $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\ell = \lim_a f$

Proposition. Si f admet une limite en $a \in I$ alors celle-ci est égale à $f(a)$

Proposition. Si f admet une limite finie en $a \in \bar{I}$ alors f est bornée au voisinage de a .

Théorème. Soit $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{C}$ alors

$$\lim_a f = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_a \operatorname{Re} f = \operatorname{Re} \ell \\ \lim_a \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} \ell \end{cases}$$

Proposition. Soit f et g admettant des limites complexes ℓ et ℓ' en $a \in \bar{\mathbb{R}}$ alors $\lim_a f + g = \ell + \ell'$ et $\lim_a fg = \ell \ell'$.

Proposition. Si $\lim_a f = \ell \in \mathbb{C}^*$, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est correctement définie au voisinage de a et $\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$.

VII. Comparaison de fonctions

Dans cette section, on s'intéresse à des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ mais pas nécessairement en a .

Elles sont donc définies sur $\mathcal{D}$ de la forme $[a - h, a + h]$ ou $[a - h, a + h] \setminus \{a\}$ ou $[a, a + h]$ ou $]a, a + h]$ ou $[a - h, a]$ ou $[a - h, a[$ si $a \in \mathbb{R}$, ou de la forme $[M, +\infty[$ si $a = +\infty$ ou de la forme $] - \infty, M[$ si $a = -\infty$.

On se limite à des fonctions ne s'annulant pas sur $\mathcal{D}$.

1. Fonctions dominées

Définition. On dit que f est dominée par la fonction g au voisinage de a lorsque la fonction f/g est bornée au voisinage de a .

Proposition. $f \underset{a}{=} O(1) \Leftrightarrow f$ est bornée au voisinage de a

Proposition. Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $\lim_a g = 0$ alors $\lim_a g = 0$.

Proposition. Transitivité

$$f \underset{a}{=} O(g) \text{ et } g \underset{a}{=} O(h) \Rightarrow f \underset{a}{=} O(h)$$

Proposition. Combinaison linéaire

$$f \underset{a}{=} O(h) \text{ et } g \underset{a}{=} O(h) \Rightarrow \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \quad \lambda f + \mu g \underset{a}{=} O(h)$$

Proposition. Produit

$$f \underset{a}{=} O(g) \text{ et } h \underset{a}{=} O(\phi) \Rightarrow fh \underset{a}{=} O(g\phi)$$

Proposition. Quotient Soit f et g deux fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a , alors

$$f \underset{a}{=} O(g) \Leftrightarrow \frac{1}{g} \underset{a}{=} O\left(\frac{1}{f}\right)$$

Proposition. Puissance positive

Soit f et g deux fonctions strictement positives au voisinage de a et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ alors

$$f \underset{a}{=} O(g) \Leftrightarrow f^\alpha \underset{a}{=} O(g^\alpha)$$

2. Fonctions négligeables

Définition. On dit que f est dominée par la fonction g au voisinage de a lorsque $\lim_a f/g = 0$.

Proposition. $f \underset{a}{=} o(1) \Leftrightarrow \lim_a f = 0$

Propriétés similaires aux fonctions dominées

Proposition. Croissance comparées

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \quad (\ln x)^\beta \underset{\infty}{=} o(x^\alpha)$$

$$\forall (\alpha, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \quad x^\alpha \underset{\infty}{=} o(e^{\lambda x})$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \quad |\ln x|^\beta \underset{\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

3. Fonctions équivalentes

Définition. On dit que f est équivalente à la fonction g au voisinage de a si $\lim_a f/g = 1$.
On note $f \sim_a g$

Proposition. La relation $\sim_a$ est une relation d'équivalence

Proposition. On a $f - g = o(f) \Leftrightarrow f \sim_a g$.

Propriétés similaires aux fonctions dominées
équivalent d'un polynôme en 0 et $+\infty$, équivalent d'une fraction rationnelle

Proposition. Si les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de a alors elles sont de même signe au voisinage de a .

Proposition. Si $f \sim_a g$ et $\lim_a f = \ell$, alors $\lim_a g = \ell$

Proposition. Soit $\ell \in \mathbb{C}^*$ alors $f \sim_a \ell \Leftrightarrow \lim_a f = \ell$

Remarque : $f \sim 0$ signifie que f est nulle au voisinage de a . Si l'on tombe sur ce résultat c'est sûrement que l'on a fait une erreur comme sommer ou soustraire des équivalents.

Remarque : Ne jamais sommer des équivalents. Quand on veut sommer il faut repasser par des o .

Proposition. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors $f(x) - f(a) \sim_a f'(a)(x - a)$

Proposition. (*) $\sin x \sim_0 x$, $\tan x \sim_0 x$, $\ln(1+x) \sim_0 x$, $\exp(x) - 1 \sim_0 x$, $(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$

Proposition. (*) $\cos x - 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2}$